

**Программа кандидатского экзамена по специальности**  
**1.1.8 «Механика деформируемого твердого тела» как основной  
специальности**

**1. Механика и термодинамика сплошных сред**

1.1. Понятие сплошного тела. Гипотеза сплошности. Физически и геометрически малый элемент. Деформация элемента сплошной среды. Два способа описания деформации сплошного тела. Координаты Эйлера и координаты Лагранжа. Переход от Эйлерова описания к Лагранжеву и обратно.

1.2. Тензор деформации Коши-Грина. Геометрический смысл, компонент тензора деформации Грина. Тензор деформации Альманси. Геометрический смысл компонент тензора деформации Альманси. Условия совместности деформаций. Формулировка условий совместности деформаций в цилиндрической и сферической системе координат. Вычисление тензора малых деформаций по заданному полю перемещений. Формулы Чезаро.

1.3. Классификация сил в механике сплошных сред: внешние и внутренние силы, массовые и поверхностные силы. Тензоры напряжений Коши, Пиолы и Кирхгофа.

1.4. Законы сохранения механики сплошных сред: уравнения баланса массы, импульса, момента импульса, кинетической, потенциальной и полной энергии.

1.5. Термодинамические процессы и циклы. Термодинамические параметры состояния. Понятия о работе, теплоте, внутренней энергии, температуре и энтропии. Первый и второй законы термодинамики. Термодинамические потенциалы состояния. Общие формы определяющих соотношений механики сплошных сред.

1.6. Физическая размерность. Анализ размерностей и П-теорема. Автомодельные решения. Примеры.

## **2. Теория упругости**

2.1. Упругое деформирование твердых тел. Упругий потенциал и энергия деформации. Линейно упругое тело Гука. Понятие об анизотропии упругого тела. Тензор упругих модулей. Частные случаи анизотропии: трансверсально изотропное и ортотропное упругое тело. Упругие модули изотропного тела.

2.2. Полная система уравнений теории упругости. Уравнения Ламе в перемещениях. Уравнения Бельтрами—Митчелла в напряжениях. Границные условия. Постановка краевых задач математической теории упругости. Основные краевые задачи. Принцип Сен-Венана.

2.3. Общие теоремы теории упругости: теорема Клапейрона, тождество взаимности, теорема единственности. Основные энергетические функционалы линейной теории упругости. Вариационные принципы теории упругости: принцип минимума полной потенциальной энергии, принцип минимума дополнительной энергии, принцип Рейснера. Теоремы Кастильяно. Теорема Бетти. Примеры.

2.4. Действие сосредоточенной силы в неограниченной упругой среде. Тензор Грина. Границные интегральные представления напряжений и перемещений. Формула Сомильяны. Общие представления решений уравнений теории упругости: представление Кельвина, представление Галеркина и представление Папковича—Нейбера. Нормальная нагрузка на границе полупространства (задача Буссинеска). Касательная нагрузка на границе полупространства (задача Черрути).

2.5. Плоское напряженное и плоское деформированное состояние. Плоская задача теории упругости. Метод комплексных потенциалов Колосова—Мусхелишвили. Комплексное представление напряжений и перемещений. Уравнения плоской задачи теории упругости в полярных координатах. Смешанная задача для полуплоскости. Задача Гриффитса.

2.6. Антиплоская деформация. Трещина антиплоского сдвига в упругом теле. Кручение и изгиб призматического тела (задача Сен-Венана). Теоремы о циркуляции касательного напряжения при кручении и изгибе.

Центр изгиба.

2.7. Задача о действии штампа с плоским основанием на полуплоскость. Контактная задача Герца.

2.8. Теория тонких упругих пластин и оболочек. Основные гипотезы. Полная система уравнений теории пластин и оболочек. Граничные условия. Постановка задач теории пластин и оболочек. Безмоментная теория. Краевые эффекты. Задача о круглой симметрично загруженной пластине.

2.9. Динамические задачи теории упругости. Уравнения движения в форме Ламе. Динамические, геометрические и кинематические условия совместности на волновом фронте. Свободные волны в неограниченной изотропной упругой среде. Общее решение в форме Ламе. Фундаментальное решение динамических уравнений теории упругости для пространства. Плоские гармонические волны. Коэффициенты отражения, прохождения и трансформации. Полное отражение. Поверхностные волны Релея. Волны Лява. Установившиеся колебания упругих тел. Частоты и формы собственных колебаний. Вариационный принцип Релея.

### **3. Температурные задачи теории упругости. Уравнения термоупругости. Теория пластиичности.**

3.1. Пластическое деформирование твердых тел. Предел текучести. Упрочнение. Остаточные деформации. Идеальная пластиичность. Физические механизмы пластического течения. Понятие о дислокациях. Локализация пластических деформаций. Линии Людерса—Чернова.

3.2. Идеальное упругопластическое тело. Идеальное жесткопластическое тело. Пространство напряжений. Критерий текучести и поверхность текучести. Критерии Треска и Мизеса. Пространство главных напряжений. Геометрическая интерпретация условий текучести. Условие полной пластиичности. Влияние среднего напряжения.

3.3. Упрочняющееся упругопластическое тело. Упрочняющееся жесткопластическое тело. Функция нагружения, поверхность нагружения. Параметры упрочнения.

3.4. Законы связи между напряженным и деформированным состояниями в теории течения. Принцип Мизеса. Постулат Друккера. Ассоциированный закон пластического течения. Теория скольжения. Краевые задачи теории течения. Теоремы единственности. Вариационные принципы теории течения.

3.5. Теория предельного равновесия. Статическая и кинематическая теоремы теории предельного равновесия. Верхние и нижние оценки. Примеры.

3.6. Кручение призматического тела за пределом упругости. Предельное равновесие при кручении. Характеристики. Поверхность напряжений как поверхность постоянного ската. Песчаная аналогия. Разрывы напряжений. Песчано-мембранные аналогии Прандтля—Надаи для кручения идеально упругопластических тел.

3.7. Пластическое плоское деформированное состояние. Уравнения для напряжений и скоростей. Статически определимые и неопределенные задачи. Характеристики. Свойства линий скольжения. Методы решения основных краевых задач теории плоской пластической деформации. Задача Прандтля о вдавливании штампа. Пластическое плоское напряженное состояние. Уравнения для напряжений и скоростей при условии пластичности Мизеса. Характеристики.

3.8. Плоские упругопластические задачи теории идеальной пластичности. Двухосное растяжение толстой и тонкой пластин с круговым отверстием.

3.9. Деформационные теории пластичности. Теория Генки. Теория малых упругопластических деформаций А.А. Ильюшина. Теорема о разгрузке. Метод упругих решений. Задача о толстостенной трубе из упрочняющегося материала.

3.10. Упругопластические волны в стержне. Ударное нагружение. Волна разгрузки. Остаточные деформации. Критическая скорость удара.

#### **4. Теория вязкоупругости и ползучести**

4.1. Понятие о ползучести и релаксации. Кривые ползучести и релаксации. Простейшие модели линейно вязкоупругих сред: модель Максвелла, модель Фохта, модель Томсона. Время релаксации. Время запаздывания.

4.2. Определяющие соотношения теории линейной вязкоупругости. Ядра ползучести и релаксации. Непрерывные ядра и ядра со слабой особенностью. Термодинамические ограничения на выбор ядер ползучести и релаксации.

4.3. Формулировка краевых задач теории вязкоупругости. Методы решения краевых задач теории вязкоупругости: принцип соответствия Вольтерра, применение интегрального преобразования Лапласа, численные методы. Теорема единственности.

4.4. Вариационные принципы в линейной вязкоупругости. Применение вариационного метода к задачам изгиба.

4.5. Плоская задача о вдавливании жесткого штампа в вязкоупругую полуплоскость. Контакт вязкоупругих тел: аналог задачи Герца.

4.6. Определяющие соотношения нелинейной теории вязкоупругости. Разложение Вольтерра—Фреше. Упрощенные одномерные модели.

4.7. Теории старения, течения, упрочнения и наследственности. Ползучесть при сложном напряженном состоянии. Определяющие соотношения.

4.8. Установившаяся ползучесть. Уравнения состояния деформируемых тел, находящихся в условиях установившейся ползучести. Постановка краевых задач. Вариационные принципы теории установившейся ползучести: принцип минимума полной мощности, принцип минимума дополнительного рассеяния. Установившаяся ползучесть и длительная прочность стержня.

4.9. Неустановившаяся ползучесть. Определяющие уравнения теории неустановившейся ползучести. Вариационные принципы теории течения и теории упрочнения. Неустановившаяся ползучесть стержневой решетки. Устойчивость стержней и пластин из реономных материалов.

## **5. Прочность и разрушение материалов и элементов конструкций**

5.1. Понятие о разрушении и прочности тел. Общие закономерности и основные типы разрушения. Структурные аспекты прочности материалов. Кристаллическое строение металлов, несовершенства кристаллической решетки, общие свойства дислокаций. Механизмы развития хрупкого и вязкого разрушений материалов.

5.2. Экспериментальная механика разрушения твердых тел. Статические испытания на прочность материалов. Хрупкое и вязкое разрушения. Разрушения в условиях ползучести, кривые длительной прочности. Усталость материалов. Понятие о динамической прочности твердых тел.

5.3. Предельные состояния и механические теории прочности твердых тел. Расчет прочности по допускаемым напряжениям. Коэффициент запаса прочности.

5.4. Двумерные задачи о трещинах в упругом теле. Метод разложения по собственным функциям в задаче о построении асимптотик полей напряжений и перемещений у вершины трещины в упругом теле. Коэффициент интенсивности напряжений, методы его вычисления и оценки.

5.5. Скорость высвобождения энергии при продвижении трещины в упругом теле. Энергетический подход Гриффитса в механике разрушения. Силовой подход в механике разрушения: модели Баренблатта и Ирвина. Эквивалентность подходов в случае хрупкого разрушения. Формула Ирвина.

5.6.  $J$ -интеграл Эшелби—Черепанова—Райса и его инвариантность. Вычисление потока энергии в вершину трещины.  $J_R$  - кривая.

5.7. Динамическое распространение трещин. Динамический коэффициент интенсивности напряжений. Предельная скорость трещины хрупкого разрушения (теоретическая оценка и экспериментальные данные).

5.8. Локализованное пластическое течение у вершины трещины. Оценка линейного размера пластической зоны у вершины трещины по

Ирвину. Поле скольжения у вершины трещины нормального отрыва в идеально пластическом теле. Модель трещины Леонова—Панасюка—Дагдейла с узкой зоной локализации пластических деформаций.

5.9. Кинетическая концепция прочности твердых тел. Формула Журкова. Кинетическая теория трещин. Рост трещин в условиях ползучести.

5.10. Концентраторы напряжений. Коэффициент концентрации напряжений: растяжение упругой полуплоскости с круговым и эллиптическим отверстиями.

5.11. Понятие об усталостном разрушении. Малоцикловая и многоцикловая усталость. Основные законы роста усталостных микро- и макротрещин. Кривая усталости (Велера). Критерий Вейбулла. Линейный закон суммирования повреждений. Усталость при сложном напряженном состоянии. Статистическая природа усталостной прочности. Критерии усталостной прочности.

5.12. Понятие о поврежденности. Типы поврежденности. Параметр поврежденности Качанова-Работнова. Кинетические уравнения накопления поврежденности.

5.13. Принцип линейного суммирования повреждений. Накопление повреждений в условиях ползучести. Критерии длительной прочности при одномерном и при сложном напряженных состояниях. Тензор повреждений и теория длительной прочности А.А.Ильюшина. Оператор повреждений.

## **6. Численные методы решения задач механики деформируемого твердого тела**

6.1. Метод конечных разностей. Типичные разностные схемы для параболических, эллиптических и гиперболических уравнений. Метод конечных разностей для дифференциальных уравнений теории упругости.

6.2. Вариационный принцип минимума полной потенциальной энергии упругого тела. Методы Релея-Ритца, Бубнова-Галеркина и градиент-

ного спуска в задачах минимизации функционала полной потенциальной энергии.

6.3. Метод конечных элементов в механике деформируемого твердого тела.

6.4. Формула Сомильяны и метод граничных интегральных уравнений (метод граничных элементов).

6.5. Метод характеристик в двумерных задачах теории пластичности. Область определенности и область зависимости решения гиперболической краевой задачи.

6.6. Метод лучевых разложений для решения гиперболических задач теории пластичности и волновой динамики.

6.7. Понятие о вычислительном эксперименте. Использование вычислительного эксперимента для решения задач механики деформируемого твердого тела.

## **I. Рекомендуемая литература**

1. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. М.: Ленанд, 2014.
2. Седов Л.И. Механика сплошной среды: в 2-х томах. М.: Лань, 2004.
3. Победря Б.Е., Георгиевский Д.В. Основы механики сплошной среды. М.: Физматлит, 2006.
4. Ильюшин А.А., Ломакин В.А., Шмаков А.П. Задачи и упражнения по механике сплошной среды. М.: URSS, 2015.
5. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975.
6. Победря Б.Е., Георгиевский Д.В. Лекции по теории упругости. М.: Ленанд, 2018.
7. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988.
8. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1975.
9. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970.
10. Ильюшин А.А. Пластичность: основы общей математической теории. М.: URSS, 2016.
11. Ильюшин А.А. Пластичность: упруго — пластические деформации. М.: Ленанд, 2018.
12. Ключников В.Д. Математическая теория пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1980.
13. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969.
14. Ивлев Д.Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966.
15. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. М.: Мир, 1974.
16. Ильюшин А.А., Победря Б.Е. Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970.
17. Бровко Г.Л. Определяющие соотношения механики сплошной среды. Развитие математического аппарата и основ общей теории. М.: Наука, 2017.

18. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1965.
19. Керштейн И.М., Клюшников В.Д., Ломакин Е.В., Шестериков С.А. Основы экспериментальной механики разрушения. М.: МГУ, 1989.
20. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966.
21. Закономерности ползучести и длительной прочности [Справочник]. Под общ. ред. С.А. Шестерикова. М.: Машиностроение, 1983.
22. Филоненко-Бородич М.М. Механические теории прочности. Изд-во МГУ, 1961.
23. Завойчинская Э.Б., Кийко И.А. Введение в теорию процессов разрушения твердых тел. М.: МГУ. 2004.
24. Москвитин В.В. Циклические нагрузления элементов конструкций. Наука. 1981.
25. Коллинз Дж. Повреждение материалов в конструкциях / анализ, предсказание, предотвращение М.: Мир, 1984.
26. Качанов Л.М. Основы механики разрушения. Наука. 1974.
27. Пестриков В.М., Морозов Е.М. Механика разрушения. СПб: ЦОП "Профессия", 2012.
28. Парトン В.З. Механика разрушения: От теории к практике. М.: Наука, 1990.
29. Черепанов Г.П. Механика разрушения. Изд-во: Регулярная и хаотическая динамика. Институт компьютерных исследований. 2012.
30. Качанов Л.М. Основы механики разрушения. М.: Наука, 1974.
31. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
32. Кишкин Б.П. Конструкционная прочность материалов. Изд-во МГУ, 1976.
33. Михлин С. Г., Морозов Н. Ф., Паукшто М. В. Интегральные уравнения в теории упругости. СПб.: СПбГУ, 1994.

34. Угодчиков А. Г., Хуторянский Н. М. Метод граничных элементов в механике деформируемого твердого тела. – Казань: КГУ, 1986.
35. Купрадзе В. Д. Методы потенциала в теории упругости. – М.: Физматгиз, 1963.
36. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Метод граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984.
37. Левин В. А., Вершинин А. В. Численные методы. Параллельные вычисления на ЭВМ. М.: Физматлит, 2015.
38. Бате К., Вильсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. М.: Стройиздат, 1982.
39. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. М.: Мир, 1976.
40. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975.