

**Программа вступительного экзамена в аспирантуру по специальности**  
**1.1.9. «Механика жидкости, газа и плазмы»**

**ОБЩАЯ ЧАСТЬ**

1. Линейные отображения, операции с матрицами, решение систем линейных алгебраических уравнений. Теорема о неявной функции.
2. Задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Фундаментальная система решений системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Метод вариации постоянных. Классификация Пуанкаре особых точек на плоскости. Решение линейного уравнения  $n$ -го порядка, квазимногочлены.
3. Формулы Гаусса—Остроградского и Стокса.
4. Свойства производной аналитической функции и интеграл Коши. Простейшие конформные отображения. Ряды Тейлора и Лорана.
5. Классификация и примеры линейных уравнений с частными производными 2-го порядка. Основные виды начальных и краевых условий. Характеристики линейных уравнений с двумя независимыми переменными.
6. Формула Эйлера для поля скоростей в твердом теле; теоремы сложения скоростей и ускорений для точки; ускорение Кориолиса.
7. Инерциальные системы отсчета, принцип Галилея. Силы инерции.
8. Свободные и вынужденные колебания линейного осциллятора с трением. Математический маятник и его фазовый портрет.
9. Получение орбит в задаче о движении материальной точки в гравитационном поле притягивающего центра.
10. Внутренние и внешние силы для системы материальных точек. Заданные силы и реакции связей. Теоремы об изменении и законы сохранения импульса, кинетического момента и кинетической энергии системы. Модели сил трения.
11. Уравнения движения твердого тела с применением главных осей инерции. Вращение твердого тела по инерции. Осесимметричный волчок, гироскопический эффект.
12. Модель идеальных связей. Уравнения Лагранжа и Гамильтона для голономных систем с потенциальными силами. Интеграл энергии, циклический интеграл. Вариационный принцип Гамильтона.
13. Теорема Лагранжа об устойчивости положения равновесия. Теория малых колебаний. Теорема Якоби об интегрировании канонических уравнений, метод разделения переменных.
14. Управляемость, наблюдаемость, стабилизируемость механических систем. Оценивание состояния при случайных возмущениях. Принцип максимума Понтрягина в оптимальном управлении.
15. Свойства тензоров конечных и малых деформаций. Кинематический смысл компонент тензора скоростей деформации. Кинематические свойства вихрей. Сохранение массы и уравнение неразрывности в переменных Эйлера и Лагранжа.
16. Массовые и поверхностные силы. Законы изменения импульса и кинетического момента. Симметричность тензора напряжений. Дифференциальные уравнения движения сплошной среды. Связь между напряженным состоянием и деформацией. Определяющие соотношения. Замкнутые системы уравнений.
17. Теорема об изменении кинетической энергии, работа внутренних поверхностных сил. Первый закон термодинамики. Уравнение притока тепла. Вектор потока тепла, закон теплопроводности Фурье. Второй закон термодинамики. Энтропия.
18. Модели идеальных жидкостей. Постановки задач. Установившиеся течения, интеграл Бернулли. Парадокс Д'Аламбера. Потенциальные течения, интеграл Коши—Лагранжа. Вихревые течения, теоремы Томсона и Лагранжа.

19. Модель вязкой ньютоновской жидкости, постановка задач, граничные условия. Ламинарные и турбулентные течения. Число Рейнольдса. Течение Пуазейля. Уравнения Рейнольдса. Понятие о пограничном слое.
20. Модель линейного упругого тел, закон Гука, постановки задач теории упругости в перемещениях и напряжениях. Продольные и поперечные волны в изотропной упругой среде. Функция напряжений плоского напряженного состояния. Задача Ламе о толстостенной трубе.
21. Слабые и сильные разрывы. Условия на поверхности разрыва. Ударные волны. Число Маха.
22. Модели неупругого поведения тел: идеальная пластичность, упрочнение, линейная вязкоупругость.
23. Адиабатические и изотермические процессы. Термодинамические модели вязких теплопроводных совершенного газа и несжимаемой жидкости. Линейная термоупругость.
24. Моделирование физических процессов, пи-теорема. Критерии подобия.

### **Литература к общей части**

1. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Основы алгебры. М.: Физматлит, 1994.
2. Зорич В.А. Математический анализ. Ч. 1, 2. М.: Изд-во МЦНМО, 2012.
3. Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. М.: Едиториал УРСС, 2004.
4. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.
5. Тихонов А.Н., Самарский В.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.
6. Маркеев А.П. Теоретическая механика. М.: Наука. 1990.
7. Голубев Ю.Ф. Основы теоретической механики. М.: Изд-во МГУ, 2000.
8. Александров В.В., Болтянский В.Г., Лемак С.С., Парусников Н.А., Тихомиров В.М. Оптимальное управление движением. М.: Физматлит, 2005.
9. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 1, 2. М.: Наука, 1994.
10. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1978.
11. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Т.1, 2. М.: Физматгиз. 1963.
12. Черный Г.Г. Газовая динамика. М.: Наука. 1988.
13. Победра Б.Е., Георгиевский Д.В. Основы механики сплошной среды. М.: Физматлит, 2006.
14. Галин Г.Я., Голубятников А.Н., Каменярж Я.А., Карликов В.П., Куликовский А.Г., Петров А.Г., Свешникова Е.И., Шикина И.С., Эглит М.Э. Механика сплошных сред в задачах. Т. 1.: Теория и задачи. Т. 2.: Ответы и решения. М.: Московский лицей, 1996.
15. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975.
16. Моисеев Н.Д. Очерки развития механики. М.: Изд-во МГУ, 1961.

### **СПЕЦИАЛЬНАЯ ЧАСТЬ**

1. Линейные отображения, операции с матрицами, решение систем линейных алгебраических уравнений. Теорема о неявной функции. Линейные операторы в  $n$ -мерном пространстве. Собственные значения и собственные векторы линейных операторов.
2. Ряд Тейлора для функции одной и нескольких переменных. Ряды Фурье, интегралы Фурье.
3. Дифференциальные операторы: градиент, дивергенция, ротор, оператор Лапласа. Объемные, поверхностные и криволинейные интегралы. Формулы Остроградского—Гаусса и Стокса преобразования интегралов.
4. Задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. Существование и единственность решения.
5. Линейное дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка. Линейное однородное уравнение. Линейная независимость и фундаментальная система решений. Детерминант Вронского. Линейное уравнение  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами. Общее решение. Фазовое пространство. Интегральные кривые. Особые точки системы линейных уравнений. Типы особых точек на плоскости.
6. Функции комплексного переменного. Производная и дифференциал функции комплексного переменного. Условия Коши—Римана. Аналитические функции. Простейшие конформные отображения.

7. Формула Коши. Ряды Тейлора и Лорана. Особые точки однозначных аналитических функций.
8. Классификация линейных уравнений с частными производными 2-го порядка. Характеристики линейных уравнений с двумя независимыми переменными. Примеры разных типов уравнений из механики сплошной среды и физики.
9. Угловая скорость абсолютно твердого тела. Формула Эйлера для поля скоростей точек абсолютно твердого тела. Теоремы сложения скоростей и ускорений в сложном движении точки; ускорение Кориолиса.
10. Инерциальные системы отсчета, принцип относительности Галилея. Принцип детерминированности для системы материальных точек. Аксиома освобождения от связей. Идеальные связи. Принцип Даламбера—Лагранжа. Движение материальной точки относительно неинерциальной системы отсчета. Силы инерции.
11. Свободные и вынужденные (под действием периодической силы) колебания гармонического осциллятора с линейным вязким трением. Математический маятник и его фазовый портрет. Физический маятник: уравнение движения, приведенная длина.
12. Задача Кеплера о движении материальной точки в гравитационном поле неподвижного притягивающего центра. Классификация орбит в зависимости от значения постоянной интеграла энергии. Первая и вторая космические скорости.
13. Внутренние и внешние силы для системы материальных точек. Заданные силы и реакции связей. Теоремы об изменении импульса, кинетического момента и кинетической энергии системы материальных точек. Законы сохранения. Модели линейного вязкого трения и сухого трения Кулона.
14. Динамические уравнения Эйлера—Пуассона движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. Случай Эйлера: уравнения движения, первые интегралы, фазовый портрет. Случай Лагранжа: первые интегралы.
15. Уравнения Лагранжа второго рода для голономных систем с потенциальными силами. Обобщенный интеграл энергии, циклический интеграл. Вариационный принцип Гамильтона.
16. Теорема Лагранжа—Дирихле об устойчивости положения равновесия консервативной лагранжевой системы. Уравнения малых колебаний: нормальные координаты, частоты малых колебаний, общее решение.
17. Канонические уравнения Гамильтона. Уравнение Гамильтона—Якоби и его полный интеграл. Теорема Якоби об интегрировании канонических уравнений Гамильтона. Отыскание полного интеграла уравнения Гамильтона—Якоби методом разделения переменных в автономном случае, при наличии циклической координаты, при отделении переменных в функции Гамильтона.
18. Управляемость, наблюдаемость, стабилизируемость механических систем. Оценивание состояния при случайных возмущениях. Принцип максимума Понтрягина в оптимальном управлении.
19. Понятие сплошной среды. Пространственные и материальные координаты, эйлерово и лагранжево описание движения сплошной среды. Поля перемещений, скоростей, ускорений, соотношения между ними при лагранжевом и эйлеровом описании. Траектории и линии тока.
20. Тензоры конечных и малых деформаций, их скалярные инварианты, связь с вектором перемещения, уравнения совместности. Тензор скоростей деформаций. Кинематический смысл его компонент.
21. Дивергенция скорости и вектор вихря скорости, их механический смысл. Циркуляция вектора скорости. Потенциальное движение.
22. Закон сохранения массы для конечного объема сплошной среды. Уравнение неразрывности для сжимаемой и несжимаемой среды в переменных Эйлера и Лагранжа.
23. Закон сохранения количества движения для конечного объема сплошной среды. Тензор напряжений. Дифференциальное уравнение движения для произвольной сплошной среды.
24. Закон сохранения момента количества движения для конечного объема сплошной среды в дифференциальной форме. Симметрия тензора напряжений.
25. Закон сохранения энергии для конечного объема сплошной среды. Вектор потока тепла. Дифференциальное уравнение энергии. Теорема о кинетической энергии. Работа внутренних сил. Уравнение притока тепла. Адиабатические и изотермические процессы, приток тепла за счет теплопроводности. Закон теплопроводности Фурье.
26. Обратимые и необратимые процессы. Второй закон термодинамики. Тождество Гиббса. Приток энтропии извне. Производство энтропии в необратимых процессах.

27. Условия на поверхностях сильного разрыва в сплошных средах. Тангенциальные разрывы и ударные волны.
28. Модель идеальной жидкости. Уравнения движения Эйлера. Понятие баротропии. Замкнутые системы уравнений для идеальной несжимаемой жидкости и идеального баротропного газа. Начальные и граничные условия.
29. Уравнения состояния для сжимаемых жидкостей и газов. Модель совершенного газа. Адиабата Пуассона. Полная система уравнений для идеального совершенного теплопроводного газа. Понятие о термодинамических потенциалах двухпараметрических газов.
30. Интегралы Бернулли и Коши—Лагранжа.
31. Кинематические и динамические теоремы о вихрях: теоремы Томсона, Лагранжа, Гельмгольца.
32. Потенциальные движения несжимаемой жидкости. Уравнение Лапласа. Примеры потенциальных течений: поступательный поток, источник, диполь, точечный вихрь. Метод наложения потоков.
33. Потенциальные движения баротропного сжимаемого газа с малыми возмущениями. Волновое уравнение, его общее решение для одномерных движений с плоской и сферической симметрией. Скорость звука.
34. Определение поля скоростей несжимаемой жидкости по заданным источникам и вихрям. Формула Био—Савара. Прямолинейная вихревая нить.
35. Движение сферы в несжимаемой идеальной жидкости с постоянной и переменной скоростью. Присоединенная масса сферы.
36. Плоские потенциальные течения идеальной несжимаемой жидкости. Комплексный потенциал, комплексная скорость, метод конформных отображений. Стационарное обтекание кругового цилиндра с циркуляцией и без циркуляции.
37. Силы, действующие на тело, движущееся в идеальной жидкости: сила сопротивления, подъемная сила. Стационарное обтекание крылового профиля. Парадокс Д'Аламбера—Эйлера. Теорема Жуковского о подъемной силе. Постулат Жуковского—Чаплыгина для определения циркуляции вокруг крылового профиля с острой задней кромкой.
38. Обтекание тел со срывом струй. Схема Кирхгоффа для обтекания пластины. Понятие о кавитации.
39. Постановка задачи Коши—Пуассона о волнах на поверхности тяжелой несжимаемой жидкости. Линеаризованная постановка. Гармонические волны. Амплитуда, период и длина волны, фазовая и групповая скорости. Явление дисперсии. Уравнения мелкой воды. Линейные длинные волны, волновое уравнение. Решение Д'Аламбера задачи Коши—Пуассона для одномерных плоских волн.
40. Модель линейно-вязкой жидкости. Уравнения движения Навье—Стокса, теорема об изменении кинетической энергии, диссипация механической энергии в вязкой жидкости. Уравнение притока тепла. Замкнутые системы уравнений для вязкой теплопроводной несжимаемой и сжимаемой жидкости. Граничные условия.
41. Течение Куэтта. Течение Пуазейля в круглой трубе.
42. Движение вязкой жидкости с малыми и большими числами Рейнольдса. Приближение Стокса. Пограничный слой. Уравнения Прандтля для пограничного слоя. Граничные условия. Задача Блазиуса. Понятие об отрыве пограничного слоя.
43. Турбулентные движения. Уравнения Рейнольдса для осредненных параметров движения однородной несжимаемой жидкости. Турбулентные напряжения. Гипотеза Буссинеска. Полуэмпирическая теория турбулентности Прандтля. К-эпсилон модель турбулентности.
44. Система уравнений газовой динамики для адиабатических движений совершенного газа. Скорость звука. Число Маха. Распространение возмущений в дозвуковых и сверхзвуковых потоках. Конус Маха. Эффект Доплера.
45. Одномерные нестационарные движения. Характеристическая форма уравнений газовой динамики. Характеристики. Инварианты Римана. Волны Римана. Опрокидывание волны Римана. Центрированная волна Римана, автомодельное решение.
46. Плоские стационарные сверхзвуковые течения. Течение Прандтля—Майера. Линеаризованная задача об обтекании тонкого крыла.
47. Поверхности разрыва в идеальном газе. Условия на ударных волнах. Адиабата Гюгонио. Теорема Цемплена. Эволюционные и неэволюционные разрывы.

48. Влияние сжимаемости на форму трубок тока. Элементарная теория сопла Лавалья.
49. Условия на косом скачке уплотнения. Обтекание клина сверхзвуковым потоком. Обтекание с отошедшей ударной волной.
50. Модель линейно-упругого тела. Закон Гука. Постановки задач теории упругости в перемещениях и напряжениях. Продольные и поперечные волны в изотропной упругой среде. Функция напряжений плоского напряженного состояния. Задача Ламе о толстостенной трубе.
51. Модели неупругого поведения тел: идеальная пластичность, упрочнение, линейная вязкоупругость.
52. Формула размерности. Размерные и безразмерные величины. Пи-теорема. Физическое подобие явлений. Критерии подобия. Моделирование механических явлений. Числа Рейнольдса, Маха, Фруда, Струхала, Эйлера, Прандтля.
53. Взаимодействие сплошных сред с электромагнитным полем. Плотность заряда и плотность тока. Сила Лоренца. Джоулево тепло. Закон Ома. Уравнения электродинамики и механики сплошных сред с учетом зарядов и токов.

## РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Основы алгебры. М.: Физматлит, 1994.
2. Зорич В.А. Математический анализ. Ч. 1, 2. М.: Изд-во МЦНМО, 2012.
3. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Б.Х. Математический анализ. М.: Изд-во МГУ. 1985.
4. Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. М.: Едиториал УРСС, 2004.
5. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука. 1974.
6. Тихонов А.Н., Самарский В.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.
7. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М.: Физматгиз. 1959.
8. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.
9. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. М.: Наука. 1985.
10. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Наука. 2000.
11. Вильке В.Г. Теоретическая механика. СПб.: Лань, 2003.
12. Маркеев А.П.. Теоретическая механика. М.: Наука. 1990.
13. Александров В.В., Болтянский В.Г., Лемак С.С., Парусников Н.А., Тихомиров В.М. Оптимальное управление движением. М.: Физматлит, 2005.
14. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Т. 1, 2. М.: Физматгиз. 1963.
15. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 1, 2. М.: Наука, 1994.
16. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1978.
17. Нигматулин Р.И. Механика сплошной среды. М.: ГЕОТАР-Медиа, 2014.
18. Победря Б.Е., Георгиевский Д.В. Основы механики сплошной среды. М.: Физматлит, 2006.
19. Эглит М.Э. Лекции по основам механики сплошных сред. 2-е изд. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010.
20. Галин Г.Я., Голубятников А.Н., Каменярж Я.А., Карликов В.П., Куликовский А.Г., Петров А.Г., Свешникова Е.И., Шикина И.С., Эглит М.Э. Механика сплошных сред в задачах. Т. 1.: Теория и задачи. Т. 2.: Ответы и решения. М.: Московский лицей, 1996.
21. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. 7-е изд. М.: Дрофа, 2003.
22. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. 6-е изд. М.: Физматлит, 2015
23. Слѣзкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: Гостехиздат. 1955.
24. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974.
25. Черный Г.Г. Газовая динамика. М.: Наука. 1988.
26. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука. 1987.
27. Баранов В.Б. Гидроаэромеханика и введение в магнитную гидродинамику. М.: Изд-во МГУ, 2018.
28. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975.