



---

**МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА**  
**НИИ МЕХАНИКИ**  
**МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ**

**Физико-механический практикум**

**Волны разгрузки  
в гибких  
растяжимых  
нитях**

---

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

**ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ  
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ**

**ВОЛНЫ РАЗГРУЗКИ В ГИБКИХ  
РАСТЯЖИМЫХ НИТЯХ**

Задача практикума по механике

УДК 516  
ББК 22.2

Авторы:

Рецензент:

Волны разгрузки в гибких растяжимых нитях. Задача практикума по механике./ Под ред. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 2026. — с.

ISBN

Учебное пособие содержит задачу общего физико-механического практикума о волнах разгрузки в гибких растяжимых нитях, выполняемую студентами третьего курса механико-математического факультета МГУ. Даются навыки в постановке и проведении физического эксперимента с использованием современных компьютерных технологий. Пособие может быть полезно также студентам и преподавателям ВУЗов технического профиля.

ISBN

©Московский государственный университет, 2026

# Цель работы

Изучение волн в гибкой растяжимой нити и одного из методов определения уравнения состояния нити при динамической разгрузке.

## I. Теоретическая часть

В современной технике широко используются всевозможные механизмы, одним из элементов которых является гибкая связь, которую можно моделировать идеальным одномерным объектом — гибкой нитью.

Пусть отрезок гибкой растяжимой нити, длина которого в нерастянутом состоянии равна  $l$  закреплён в точках  $A$  и  $B$  (рис. 1). При этом расстояние между точками закрепления равно  $l$ . В начальный момент времени нить натянута закреплением некоторой точки  $C$ .

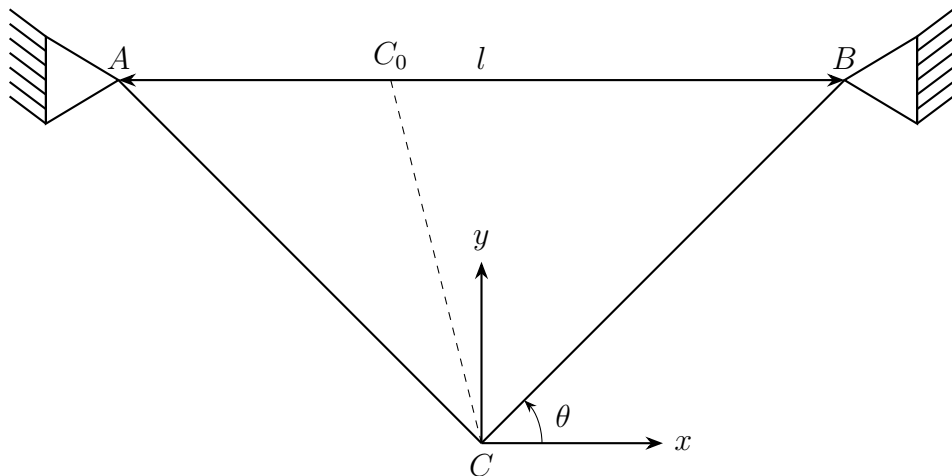


Рис. 1

Начальная деформация отрезков нити BC и AC определяется

формулами

$$\varepsilon_0 = \frac{|BC| - |BC_0|}{|BC_0|}; \quad \varepsilon'_0 = \frac{|AC| - |AC_0|}{|AC_0|} \quad (1)$$

где  $C_0$  - положение точки  $C$  в нерастянутой нити.

Будем считать, что разгрузка осуществляется по линейному закону ( $T$  - натяжение  $T_0$  - начальное натяжение)

$$T - T_0 = E(\varepsilon - \varepsilon_0), \quad (2)$$

с неизвестным заранее модулем  $E$ .

Мгновенное снятие связи в точке  $C$  имеет ударный характер, и обусловленное им движение можно рассматривать как косоу удар разгрузки. Теория ударных волн в нити подробно изложена в работах [1,2]. Здесь приводятся сведения, необходимые для теоретического решения поставленной задачи. Для этого введём лагранжеву координату  $S$  — длину нити в нерастянутом состоянии. Точка отсчета длины дуги нити произвольна, условимся производить отсчет от точки  $C$ , то есть в точке  $C - S = 0$ . Пусть:  $\vec{r}$  — радиус-вектор произвольной точки нити,  $\vec{v}$  - скорость нити,  $\vec{\tau}$  - единичный вектор касательной к нити,  $\zeta$  - длина нити в текущем состоянии (рис.2).

Из определения скорости  $\vec{v}$ , вектор касательной  $\vec{\tau}$  и деформации  $\varepsilon$ , т.е.

$$\vec{v} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}, \quad \vec{\tau} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \zeta}, \quad \varepsilon = \frac{\partial \zeta}{\partial s} - 1, \quad (3)$$

следует кинематическое уравнение движения нити

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial t} [(1 + \varepsilon)\vec{\tau}]. \quad (4)$$

На выделенный элемент  $MN$  нити, если пренебрегать сопротивлением воздуха и действием сил тяжести, действуют силы натяжения (рис.2). Пусть  $P$  - изначальная линейная плотность нити. Тогда в силу второго закона Ньютона

$$P\delta s \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{T}(s + \delta s, t) - \vec{T}(s, t),$$

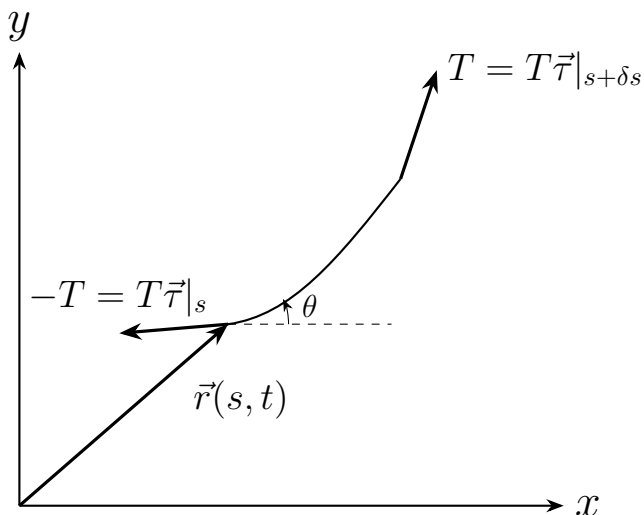


Рис. 2

откуда непосредственно следует динамическое уравнение движения нити

$$P \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{T}}{\partial s}. \quad (5)$$

Проведем анализ полученных уравнений, вводя следующие обозначения:

$$a^2 = \frac{1}{P} \frac{dT}{d\varepsilon}, \quad b^2 = \frac{T}{P(1 + \varepsilon)}$$

Уравнения (2,4,5) легко привести к виду

$$\begin{cases} T = T_0 + E(\varepsilon - \varepsilon_0), \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = a^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial s} \vec{\tau} + b^2 \frac{\partial \vec{\tau}}{\partial s}, \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial s} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \vec{\tau} + (1 + \varepsilon) \frac{\partial \vec{\tau}}{\partial t}. \end{cases} \quad (6)$$

При плоском движении нити уравнения (6) в проекции на касательную и нормаль преобразуются к системе скалярных уравнений

( $\vec{v} = u\vec{\tau} + v\vec{n}$ ,  $\vec{n}$  - нормаль к нити):

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial s} - v \frac{\partial \theta}{\partial s} &= \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}, \\ \frac{\partial v}{\partial s} + u \frac{\partial \theta}{\partial s} &= (1 + \varepsilon) \frac{\partial \theta}{\partial t}, \\ \frac{\partial u}{\partial t} - v \frac{\partial \theta}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial s}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial t} &= b^2 \frac{\partial \theta}{\partial s}\end{aligned}\tag{7}$$

Уравнения (7) удобны для приведения к характеристическому виду. Из первого и третьего уравнений системы следует, что вдоль характеристических направлений  $ds = \pm a dt$  выполняются условия

$$du - v d\theta = \pm a d\varepsilon\tag{8}$$

Из второго и четвертого уравнений получим, что вдоль направлений  $ds = \pm b dt$  выполняются условия

$$dv + u d\theta = \pm b(1 + \varepsilon) d\theta\tag{9}$$

Полученные характеристические соотношения показывают, что система (7) гиперболическая с двумя типами волн:

- продольные волны с лагранжевой скоростью

$$a = \sqrt{\frac{1}{P} \frac{dT}{d\varepsilon}},$$

- поперечные волны с лагранжевой скоростью

$$b = \sqrt{\frac{T}{P(1 + \varepsilon)}}$$

Это позволяет рассматривать задачу как автомодельную до момента времени прихода продольной волны от точки  $C$  до места закрепления нити в точке  $A$  (или  $B$ ) (рис. 1), поскольку до этого времени задача не имеет характерного линейного размера.

Введём переменную  $z = \frac{s}{t}$ , от которой должны зависеть иско-  
мые функции. При этом  $\frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{t} \frac{d}{dz}$ ,  $\frac{\partial}{\partial t} = -\frac{z}{t} \frac{d}{dz}$ . Условимся обо-  
значать обыкновенные производные  $\frac{d}{dz}$  штрихом. Тогда система (7)  
сводится к однородной системе обыкновенных дифференциальных  
уравнений:

$$\begin{aligned} u' - v\theta' &= z\varepsilon' \\ v' + u\theta' &= (1 + \varepsilon)z\theta', \\ -z(u' - v'\theta') &= a^2\varepsilon', \\ -z(v' + u\theta') &= b^2\theta'. \end{aligned} \tag{10}$$

Однородная система имеет нетривиальное решение, если её опре-  
делитель равен нулю, т.е. если  $z = \pm a$  или  $z = \pm b$ . При всех  
остальных значениях  $z$  система имеет лишь тривиальное решение  
 $u' = v' = \varepsilon' = \theta' = 0$ . Отметим, что в плоскости  $(s, t)$  лучи  $z = \pm a$   
и  $z = \pm b$  соответствуют фронтам продольных и поперечных волн,  
идуших из точки начального возмущения  $C$  (рис. 3).

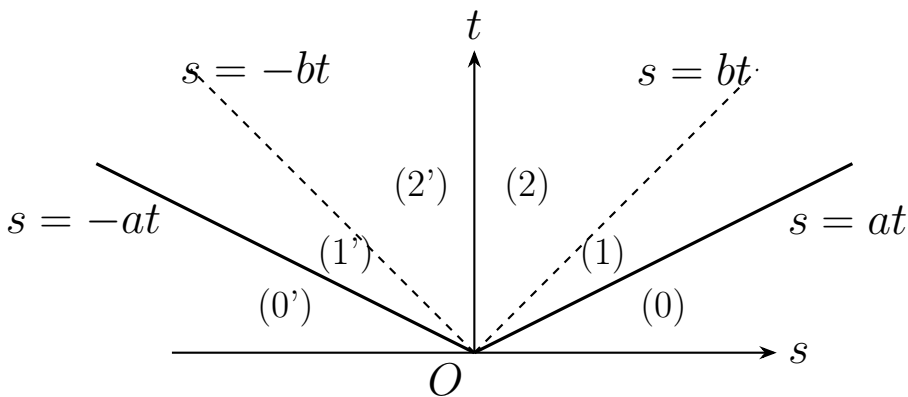


Рис. 3

Лучи делят плоскость  $(S, t)$  на пять областей. Две из них (0)  
и (0') соответствуют начальному состоянию покоя, (1) и (1') чисто

продольному движению, а область (2) продольно-поперечному движению нити. Все искомые функции постоянны в каждой из областей, что физически соответствует движению нити в виде звеньев изменяющейся длины. Элемент каждого звена имеет постоянную скорость, угол наклона касательной  $\theta$  и деформацию  $\varepsilon$ . Области разделяются фронтами волн сильного разрыва. Поскольку дифференциальные уравнения в условиях осуществления волн сильного разрыва неприменимы, необходимо воспользоваться условиями на фронтах разрыва.

Для произвольного фронта сильного разрыва с законом движения  $s = s(t)$  его абсолютная скорость в неподвижной системе координат  $(x, y)$  равна

$$\vec{D} = \frac{d\vec{r}(s(t), t)}{dt} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \dot{s} = \vec{v} + (1 + \varepsilon) \vec{\tau} \dot{s}.$$

Введём операцию скачка:  $[f] = f_2 - f_1$ , где индексы 1 и 2 соответствуют значениям функции до и после скачка. Поскольку  $[D] = 0$ , получаем кинематическое условие на фронте сильного разрыва:

$$[\vec{v}] = -[(1 + \varepsilon)\vec{\tau}] \dot{s}. \quad (11)$$

Применяя теорему об изменении количества движения к элементу нити, который за время  $\Delta t$  с одной стороны на другую (рис. 4), получим выражение

$$P \dot{s} \Delta t (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = (T_1 - T_2) \Delta t,$$

из которого следует динамическое условие на сильном разрыве нити

$$P \dot{s} [\vec{v}] = -[T \vec{\tau}]. \quad (12)$$

Совместное рассмотрение (11) и (12) показывает, что в нити возможны два типа волн сильного разрыва:

а) Продольные волны со скоростью

$$\dot{s} = \pm a^* = \pm \sqrt{\frac{[T]}{P[\varepsilon]}},$$

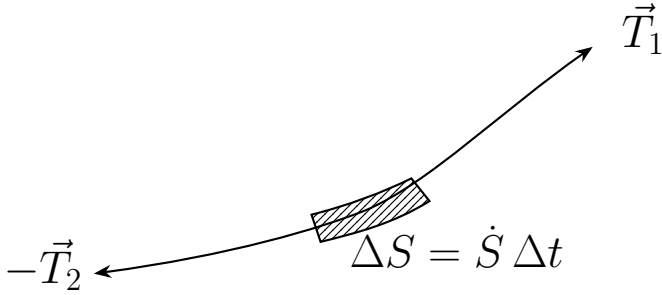


Рис. 4

на фронтах которых выполняются условия совместности:

$$[v] = 0, \quad [\theta] = 0, \quad [u] = \mp a^* [\varepsilon]. \quad (13)$$

б) Поперечные волны со скоростью

$$\dot{s} = \pm b = \pm \sqrt{\frac{T}{P(1 + \varepsilon)}},$$

с условиями совместности:

$$[\varepsilon] = 0, \quad [\vec{v}] = \mp b(1 + \varepsilon)[\vec{\tau}]. \quad (14)$$

Отметим, что при линейной зависимости  $T(\varepsilon)$ :

$$a = a^* = \sqrt{\frac{E}{P}}.$$

Рассмотрим симметричный случай нагружения нити ( $\varepsilon_0 = \varepsilon'_0$ ). В силу симметрии движения в области (2) выполняются условия  $\theta_2 = 0, v_{x2} = 0$ . Начальные условия:  $\theta = \theta_0, \quad v_x = v_y = 0, \quad \varepsilon = \varepsilon_0$ . Поскольку на поперечном фронте деформация непрерывна, обозначим  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ . Условия совместности (13), (14), с учетом того, что  $u = v_x \cos \theta + v_y \sin \theta, v = -v_x \sin \theta + v_y \cos \theta$  дают нетривиальные уравнения

$$\begin{aligned} -v_{x1} \sin \theta_0 + v_{y1} \cos \theta_0 &= 0, \\ v_{x1} \cos \theta_0 + v_{y1} \sin \theta_0 &= a(\varepsilon_0 - \varepsilon). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v_{x1} &= b(1 + \varepsilon)(1 - \cos \theta_0), \\v_{y2} - v_{y1} &= b(1 + \varepsilon) \sin \theta_0.\end{aligned}\tag{15}$$

для определения функций  $v_{x1}, v_{y1}, v_{y2}, \varepsilon$ . Теоретически система замкнута, если известен модуль  $E$  в уравнении состояния (2).

Решение системы (15) легко сводится к определению деформации из уравнения

$$a(\varepsilon - \varepsilon_0) \cos \theta_0 = \sqrt{(1 + \varepsilon) \left[ \frac{T_0}{P} + a^2(\varepsilon - \varepsilon_0) \right]} (1 - \cos \theta_0).\tag{16}$$

Дополнительное условие:  $\varepsilon < \varepsilon_0$  (разгрузка).

В силу геометрии натяжения нити  $\cos \theta_0 = \frac{1}{1 + \varepsilon_0}$ , поэтому можно исключить  $\cos \theta_0$ :

$$a(\varepsilon_0 - \varepsilon) = \sqrt{(1 + \varepsilon) \left[ \frac{T_0}{P} + a(\varepsilon - \varepsilon_0) \right]} \varepsilon_0.\tag{17}$$

## II. Экспериментальная часть

### 2.1. Описание установки

Экспериментальная установка (рис. 5) состоит из неподвижных горизонтальных балок 1, по которым перемещаются вертикальные стойки 2. По вертикальным стойкам движутся кронштейны 4 с зажимами 3 крепления нити 5. В качестве нити используется резиновый жгут, окрашенный через равные промежутки (для темной резины в качестве красителя можно использовать мел), длина каждого одинаково окрашенного элемента нити 5 см. Общая длина может варьироваться в зависимости от поставленной задачи. Оттяжка резины производится путем крепления выбранной точки  $C$  прочной льняной ниткой к проволочной петле, выполненной из хрома. Процесс движения фиксируется кинокамерой СКС-1, качество съемки обеспечивается хорошей подсветкой.

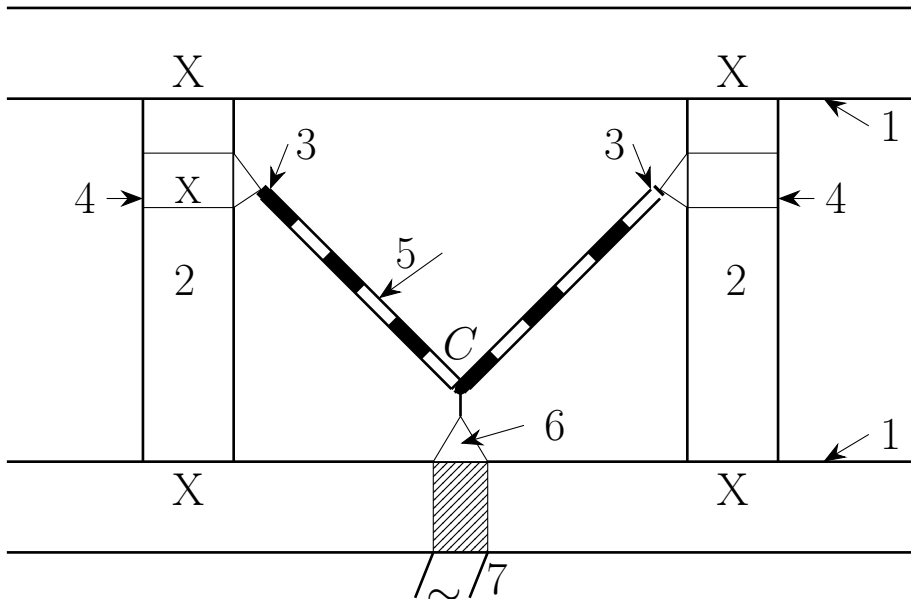


Рис. 5

Одновременно с включением камеры подается ток в цепь 7, хромированная проволока раскаляясь, пережигает нитку и последующий процесс снимается на пленку. Полученная пленка дешифруется через проектор на миллиметровку путем нанесения мест положения точек, разделяющих окрашенные отрезки. Точки наносятся через равное число кадров. В качестве масштаба времени используется переменный ток известной частоты (50 Гц). Неоновая лампочка, вспыхивающая с данной частотой, оставляет темные полосы на кинопленке, чередующиеся светлыми пробелами, когда лампочка не горит. Полоса-пробел соответствует 0.01 с. Тогда каждый кадр соответствует времени  $\Delta t = 0.01c/N$ , где  $N$  — число кадров, вмещающихся в длине полосы-пробела.

## 2.2. Порядок выполнения работы

Рекомендуется следующая последовательность проведения эксперимента.

1. Определить линейную плотность нити путем взвешивания куска измеренной длины  $P = \frac{m}{L}$ , где  $m$  — масса нити,  $L$  — ее длина.
2. Определить статическую диаграмму  $T(\varepsilon)$  путем подвешивания к нити увеличивающихся по весу грузов.
3. Развести после выбора рабочей длины  $l$  вертикальные стойки 2 (рис. 5) на ширину  $l$ .
4. Движением кронштейнов 4 установить необходимые величины деформаций, если выбрана точка крепления  $C$ .
5. После крепления точки  $C$  включить подсветку и произвести съемку процесса разгрузки.

На рис. 6 приведена качественная картина процесса, соответствующего двум последовательным кадрам.

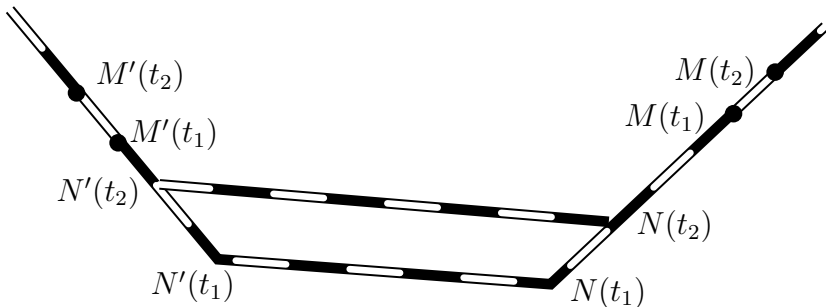


Рис. 6

Следует отметить, что продольные фронты  $M$ ,  $M'$  визуально не видно, их можно выделить только в результате расшифровки.

Характерная картина дешифрованного материала показана на рис. 7. На миллиметровке измеряется длина  $l'$  и определяется масштаб  $M = \frac{l}{l'}$ . По перемещениям точек определяются скорости  $v_x = \frac{\Delta x M}{\Delta t}$ ,  $v_y = \frac{\Delta y M}{\Delta t}$  в соответствующих областях (1) и (2). По длине отрезков (расстояния между соседними граничными точками) определяются деформации  $\varepsilon$ .

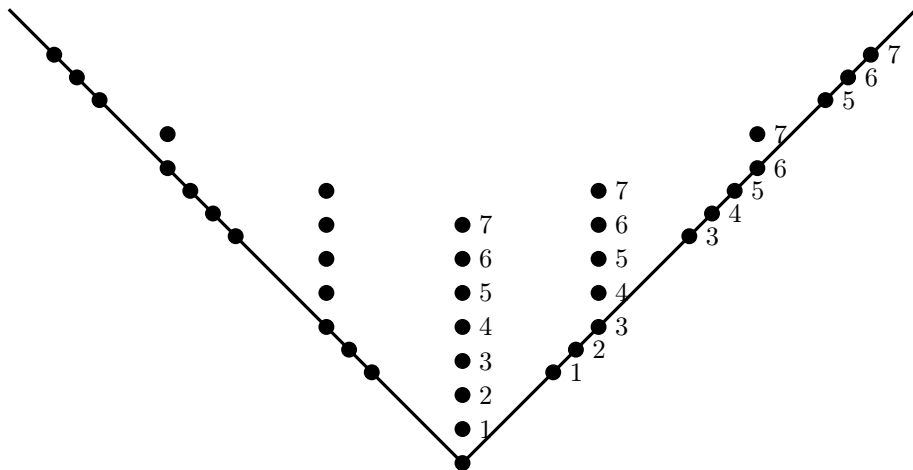


Рис. 7

### III. Обработка и анализ результатов

Результаты обработки свести в таблицу:

Область	$v_x$	$v_y$	$\varepsilon$	$\theta$
(0)	0	0	$\varepsilon_0$	$\theta_0$
(1)				
(2)		эксп теор		
(1')				
(0')	0	0	$\varepsilon'_0$	$\theta'_0$

Поскольку абсолютная скорость фронта  $M$

$$D_x = v_{x0} + a(1 + \varepsilon_0) \cos \theta_0,$$

определив  $D_x$  и воспользовавшись найденным значением, можно найти модуль

$$\frac{E}{P} = \frac{D_x^2}{(1 + \varepsilon_0)^2 \cos^2 \theta_0}, \quad \text{так как } v_{x0} = 0. \quad (18)$$

При найденном модуле  $E$  можно найти теоретическое решение системы (16) и занести полученные решения в таблицу.

Сравнение теоретических и экспериментальных значений величин дает возможность оценить ценность построенной теоретической модели процесса динамической разгрузки в резиновой нити.

## IV. Упражнения

1. Построить закон движения произвольной материальной точки нити.
2. Провести анализ соотношений между величинами скоростей продольных и поперечных волн в зависимости от характера процесса (нагружение, разгрузка) и от вида зависимости  $T(\varepsilon)$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Рахматулин Х.А. О косом ударе по гибкой нити с большими скоростями при наличии трения // ПММ. 1945. Т.9. Вып.6.
2. Певленко А.Л. Обобщение теории поперечного удара по гибкой нити // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1960. №2.