

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

---

ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ  
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

## **ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ БАЛКИ**

Задача практикума по механике

Под редакцией академика РАН Е.И. Шемякина

Издательство Московского университета

2005

# Содержание

1	Описание явления	2
2	Теоретическая часть	3
3	Экспериментальная часть	11
4	Определение модулей упругости из динамического эксперимента	14
5	Порядок выполнения эксперимента	15
6	Обработка и анализ результатов	15
7	Историческая справка	15

# ЦЕЛЬ ЗАДАЧИ

Целью работы является ознакомление с теоретическими и экспериментальными методами определения собственных частот нормальных форм изгибных колебаний стержней. Даются навыки практического применения теории на примере простого, но весьма эффективного, способа определения модуля продольной упругости материалов методом свободных колебаний.

## 1 Описание явления

Механическая система с одной степенью свободы, выведенная из состояния равновесия и освобожденная затем от действия внешних сил, может совершать свободные гармонические колебания с определенной частотой, называемой собственной частотой.

Примером могут служить колебания математического маятника, колебания груза, подвешенного на пружине малой массы и имеющего возможность перемещаться только в вертикальном направлении, крутильные колебания тонкого стержня с массой на конце и т.д.

В последних двух примерах пружина и стержень, ввиду их малой массы, играют роль только восстанавливающих усилий упругих связей; а возникающими в них инерционными усилиями можно пренебрегать по сравнению с силой инерции груза.

В теоретической механике показано, что механическая система с  $n$  степенями свободы имеет  $n$  собственных частот, соответствующих  $n$  видам нормальных колебаний, так что перемещение каждой точки системы при свободных колебаниях представляется в виде геометрической суммы перемещений, которые получила бы точка при каждом из нормальных колебаний. При одном только нормальном колебании каждая точка совершает гармоническое колебание. Таким образом, нормальным колебанием материальных точек называется такое свободное движение, при котором каждая точка совершает гармоническое колебание, причем частоты колебаний всех точек одинаковы и все точки колеблются в одной фазе.

Упругое тело, рассматриваемое как материальный континуум, имеет бесчисленное множество степеней свободы: каждая точка из бесчисленного множества материальных точек имеет три степени свободы, а взаимодействие ее с другими точками образует упругие связи. Поэтому упругое тело обладает бесчисленным множеством собственных частот, соответствующих бесчисленному множеству нормальных колебаний. Вектор перемещения,  $\mathbf{U}_n$ , точек упругого тела при каком то  $n$ -ом нормальном колебании представляется, следовательно, таким образом:  $\mathbf{U}_n = \mathbf{u}_n(x, y, z)e^{i\omega_n t}$ , где  $t$  - время,

$\omega_n$  - постоянная, определяющая собственную частоту. Из этого выражения видно, что форма тела при нормальном колебании изменяется во времени подобно самой себе. Произвольное свободное колебание можно представить в виде суммы нормальных колебаний: 
$$\mathbf{U}(x, y, z, t) = \sum_n \mathbf{u}_n(x, y, z) e^{i\omega_n t}.$$

Возможность представления сложных движений упругого тела при свободных колебаниях в виде результата наложения нормальных колебаний соответствует возможности разложения функции в тригонометрический ряд (теорема Фурье).

Если на упругое тело действует периодическая внешняя нагрузка с частотой, равной одной из собственных частот тела, то имеет место *резонанс* - амплитуда колебаний тела при отсутствии диссипативных сил будет возрастать до бесконечности. Хотя практически всегда имеются диссипативные силы (внешние и внутренние), препятствующие безграничному возрастанию амплитуды, явление резонанса может привести к возникновению недопустимо больших напряжений и к разрушению, особенно в случае резонанса на одной из низших собственных частот. В других случаях, наоборот, пользуются явлением резонанса для раскачки тел. Отсюда ясно, почему важно определение собственных частот и соответствующих им нормальных форм колебания упругих тел.

## 2 Теоретическая часть

Стержень - это твердое тело, у которого два характерных поперечных размера малы по сравнению с третьим - длиной. Балкой называется стержень, на который действуют силы в направлении, перпендикулярном его оси. В силу этого, балку можно ассоциировать с некоторой кривой состоящей из геометрических центров ее поперечных сечений. Чаще всего в качестве таких точек берутся геометрические центры тяжести поперечных сечений балки. Данную кривую обычно называют «срединным» волокном. Кавычки здесь поставлены для того, чтобы подчеркнуть тот факт, что для полых балок эта кривая может не содержать материальных точек. Будем рассматривать такие движения балки, при которых перемещения ее точек конечны, но при этом деформации малы. Это означает, что материал балки ведет себя как упругая среда. Введем лагранжевы координаты точек балки, как координаты ее точек в недеформированном состоянии. Обозначим лагранжеву координату вдоль срединного волокна буквой  $S$ . Рассмотрим элемент балки, ограниченный сечениями  $S$  и  $S + dS$ , рис.1. Отброшенные части балки заменяются главными векторами сил  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{Q} + d\mathbf{Q}$ , и главными моментами  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{M} + d\mathbf{M}$ , приложенными к центрам тяжести сечений  $S$  и  $S + dS$

соответственно.

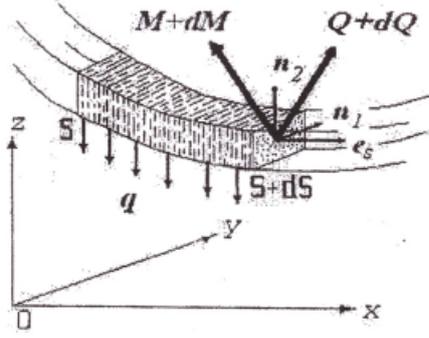


Рис. 1: Элемент балки

Таким образом, на площадках сечений действуют напряжения. Помимо этого на балку могут действовать внешние силы, главный вектор которых можно характеризовать некоторой линейной плотностью  $\mathbf{q}(S, t)$ , а главный момент - линейной плотностью  $\boldsymbol{\mu}(S, t)$ , т.е. силой и моментом, приходящимися на единицу длины балки. Внешние силы могут иметь разную физическую природу. В частности к ним можно отнести действующие массовые силы, распределенные по боковой поверхности внешние нагрузки и т.д. При упругой деформации можно пренебречь изменением плотности балки,  $\rho \approx \text{const}$ . Пусть:  $F_o$  - площадь поперечного сечения;  $\mathbf{W}$  - ускорение центра масс,  $\boldsymbol{\Omega}$  - угловая скорость,  $\hat{\mathcal{J}}$  - тензор моментов инерции элемента балки единичной длины. Тогда уравнения движения выделенного элемента балки можно записать в векторном виде в лагранжевой системе координат, заданной ортами  $\mathbf{e}_S, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$  соответственно:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial S} dS + \mathbf{q} \cdot dS = \rho F_o dS \cdot \mathbf{W}; \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial S} dS + [\mathbf{e}_S \times \mathbf{Q}] dS + \boldsymbol{\mu} dS = \frac{\partial}{\partial t} (\hat{\mathcal{J}} \boldsymbol{\Omega}) dS. \quad (2)$$

Тензор моментов инерции  $\hat{\mathcal{J}}$  возникает при вычислении момента количества движения элемента балки относительно его центра тяжести  $d\mathbf{K} = \iint_{\delta m} (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) dm = \boldsymbol{\Omega} \iint_{\delta m} r^2 dm - \iint_{\delta m} (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r} dm$ , где  $\mathbf{r}$  - радиус вектор материальной точки с началом в центре тяжести. В скалярной форме в проекциях на подвижные оси  $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_S, \mathbf{e}_2 = \mathbf{n}_1, \mathbf{e}_3 = \mathbf{n}_2$  получим:

$$\begin{aligned} dK_1 &= dJ_{11}\Omega_1 - dJ_{12}\Omega_2 - dJ_{13}\Omega_3 \\ dK_2 &= -dJ_{21}\Omega_1 + dJ_{22}\Omega_2 - dJ_{23}\Omega_3 \\ dK_3 &= -dJ_{31}\Omega_1 - dJ_{32}\Omega_2 + dJ_{33}\Omega_3 \end{aligned}$$

Здесь  $J_{ij}$ -компоненты матрицы тензора инерции:

$$\begin{aligned} dJ_{11} &= \rho dS \iint_{F_0} (x_2^2 + x_3^2) dF = J_{11} dS \\ dJ_{22} &= \rho dS \iint_{F_0} (x_1^2 + x_3^2) dF = J_{22} dS \\ dJ_{33} &= \rho dS \iint_{F_0} (x_1^2 + x_2^2) dF = J_{33} dS \\ dJ_{ij} &= \rho dS \iint_{F_0} x_i x_j dF = J_{ij} dS, (i \neq j) \end{aligned}$$

Для общего случая упругой балки уравнения (1), (2) дополняются линейными уравнениями, связывающими проекции моментов на подвижные оси  $\mathbf{e}_S, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$  с кручением  $\chi_0$  и кривизнами  $\chi_1, \chi_2$ , срединного волокна:

$$\begin{aligned} M_S &= A_0 (\chi_0 - \chi_{00}); & M_1 &= A_1 (\chi_1 - \chi_{10}); \\ M_2 &= A_2 (\chi_2 - \chi_{20}). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $\chi_{00}, \chi_{10}, \chi_{20}$  — кручение и главные кривизны срединного волокна в недеформированном состоянии.

В нашей задаче изучаются малые поперечные колебания линейноупругой балки, которая имеет круглое сечение (радиуса  $a$ ) и в недеформированном состоянии прямолинейна. Будем считать, что колебания происходят в плоскости  $Oxy$  и срединное волокно направлено по оси  $Ox$ , рис.2(а). Поскольку прогибы и углы наклона,  $\theta$ , срединного волокна малы, можно считать:

$$\begin{aligned} dS &\approx dx, \theta \approx \sin \theta \approx \operatorname{tg} \theta = \frac{\partial y}{\partial x}, \\ \chi_{20} &= 0, \chi_2 = \frac{1}{R} = \frac{\partial \theta}{\partial S} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad W_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $R$  — радиус кривизны срединного волокна,  $t$ -время,  $W_y$  — ускорение поперечного смещения балки.

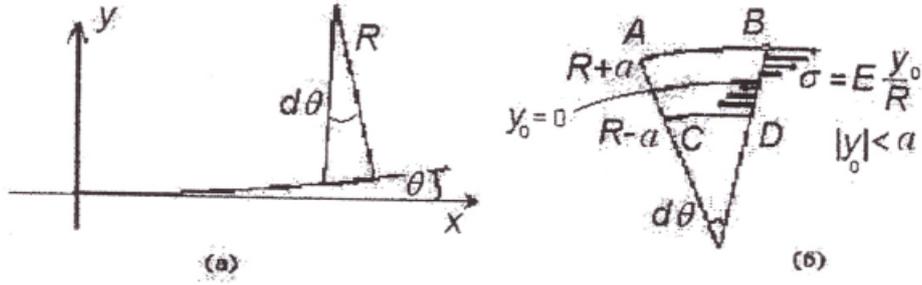


Рис. 2: Плоские колебания линейно-упругой балки

Деформация волокна, параллельного срединному, определяется его радиусом кривизны. Начальная длина всех волокон, ограниченных сечениями  $AC$  и  $BD$ , равна  $dS$ . В деформированном состоянии при чистом изгибе длина срединного волокна и длина волокон в плоскости  $Oxz$  не меняется и остается равной  $dS = R d\theta$ . Остальные волокна меняют свою длину. Так длина волокна  $AB$ , рис.2(б), равна  $dl = (R + a)d\theta$ , а для волокна  $CD - dl = (R - a)d\theta$ . Деформация,  $\varepsilon$ , любого волокна с лагранжевой координатой  $y_0$  определяется соотношением

$$\varepsilon = \varepsilon_{xx} = \frac{dl - dS}{dS} = \frac{y_0}{R}, \quad (5)$$

соответственно, нормальное напряжение,  $\sigma$ , равно

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{y_0}{R}.$$

Последнее соотношение выражает закон Гука, в нем константа материала  $E$  называется *модулем Юнга* или *модулем продольной упругости*.

На рис.2(б) приведено распределение напряжений при чистом изгибе. При этом проекция главного вектора сил на направление  $e_S$  равна нулю, а момент можно вычислить, взяв интеграл по площади сечения балки:

$$M_2 = M_z = \iint_{F_0} y_0 \sigma dF = \frac{E}{R} \iint_{F_0} y_0^2 dF = \frac{EI}{R} = EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (6)$$

В равенствах (6) обозначено

$$I = \iint_{F_0} y_0^2 dF = \frac{\pi a^4}{4}$$

- удельный момент инерции сечения балки относительно оси; мы также воспользовались приближенным значением кривизны  $1/R$  согласно (3)-(4).

Из уравнений (1), (2), (3) для решаемой задачи получим:

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q_y}{\partial x} + q_y &= \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial M_z}{\partial x} + Q_y &= J_{33} \frac{\partial \Omega_3}{\partial t}; \\ M_z &= EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.\end{aligned}\tag{7}$$

Произведение  $E \cdot I$  называется жесткостью балки.

Для тонких балок моментом инерции вращения обычно пренебрегают ( $J_{33} \approx 0$ ). Кроме того, при свободных колебаниях вертикально расположенной балки влиянием внешних сил (силы тяжести) также можно пренебречь,  $q_y = 0$ . Тогда, исключая последовательно величины в системе (7), можно получить следующее уравнение колебаний балки:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{EI}{\rho F_0} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0\tag{8}$$

Если балка совершает *нормальное изгибное колебание*, то каждая точка его оси колеблется гармонически, причем частоты колебаний всех точек одинаковы и колебания происходят в одной фазе, поэтому для обнаружения собственных частот и нормальных форм колебаний ищем решение уравнения (8) в виде

$$y(x, t) = e^{i\omega t} Y(x),\tag{9}$$

где  $Y(x)$  - функция, характеризующая форму собственных колебаний (вид изогнутой оси),  $\omega$  - частота колебаний. Подстановка (9) в (8) приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^4 Y(x)}{dx^4} - k^4 Y(x) = 0$$

где

$$k^4 = \omega^2 \rho \frac{F_0}{EI}\tag{10}$$

Общим решением этого уравнения является функция

$$Y(x) = C_1 \operatorname{ch}(kx) + C_2 \operatorname{sh}(kx) + C_3 \cos(kx) + C_4 \sin(kx).\tag{11}$$

Если балка безгранична по длине и не имеет опор, то ничего другого о нормальных колебаниях сказать нельзя, поскольку никаких ограничений на частоту колебаний

$\omega$  не налагается, а нормальная форма колебаний ограничена только видом (11) при неопределенных коэффициентах  $C_1, C_2, C_3, C_4$ . Для такой балки любая частота может быть собственной. Иначе говоря, безграничная балка имеет непрерывный спектр собственных частот.

В балке конечной длины имеются определенные граничные условия (условия закрепления), которые ограничивают произвол постоянных  $C_1, C_2, C_3, C_4$ . Для этих величин получаются из граничных условий линейные однородные алгебраические уравнения, которые содержат в коэффициентах величину  $k$ , связанную с частотой  $\omega$ . Из условия наличия нетривиальных решений этой системы уравнений (иначе ни о каких колебаниях говорить нельзя) получается уравнение, вообще говоря трансцендентное, для  $\omega$ , называемое *уравнением частот*. Таким образом, наличие границ делает спектр собственных частот дискретным.

Так как из системы однородных уравнений, в коэффициенты которой подставляются корни уравнения частот, определяются только отношения искомых постоянных, например,  $\frac{C_1}{C_4}, \frac{C_2}{C_4}, \frac{C_3}{C_4}$ , то форма нормального колебания определяется с точностью до постоянного множителя. Это означает, что форма изогнутой оси балки при нормальном колебании изменяется во времени подобно самой себе, причем амплитуда колебаний остается неопределенной.

При разных способах закрепления концов получаются различные уравнения частот и различные формы нормальных колебаний.

Рассмотрим случай, когда балка свободна в одном конце и жестко закреплена на другом.

Пусть конец балки  $x = 0$  жестко заделан, а конец  $x = L$  - свободен. В заделке прогиб и наклон касательной к изогнутой оси балки равны нулю, т.е.

$$y(0, t) = \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad (12)$$

На другом конце балки равны нулю изгибающий момент,  $M$ , и перерезывающая сила,  $Q$ , т.е.

$$\begin{aligned} Q(L, t) &= EI \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \Big|_{x=L} = 0, \\ M(L, t) &= EI \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \Big|_{x=L} = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Если на свободный торец поместить груз массы  $m$ , то первое условие в (13) заменится уравнением движения груза массы  $m$  :

$$m \frac{\partial^2 y(L, t)}{\partial t^2} = -Q(L, t),$$

а второе сохранится, если пренебречь инерцией вращения груза.

Граничные условия (12) и (13) позволяют получить для определения постоянных  $C_1, C_2, C_3, C_4$  систему однородных уравнений

$$\begin{cases} C_1 + C_3 = 0, \\ C_2 + C_4 = 0, \\ C_1 \operatorname{ch}(kL) + C_2 \operatorname{sh}(kL) - C_3 \cos(kL) - C_4 \sin(kL) = 0, \\ m\omega^2 [C_1 \operatorname{ch}(kL) + C_2 \operatorname{sh}(kL) + C_3 \cos(kL) - C_4 \sin(kL)] = \\ = k^3 EI [C_1 \operatorname{ch}(kL) + C_2 \operatorname{sh}(kL) + C_3 \sin(kL) - C_4 \cos(kL)], \end{cases} \quad (14)$$

которая имеет нетривиальное решение только в случае равенства нулю ее определителя. Условие равенства нулю определителя и приводит к уравнению частот:

$$m\omega^2 [\operatorname{sh}(kL) \cos(kL) - \operatorname{ch}(kL) \sin(kL)] - k^3 EI [1 + \operatorname{ch}(kL) \cos(kL)] = 0 \quad (15)$$

При отсутствии груза ( $m = 0$ ) уравнение (15) имеет вид:

$$\operatorname{ch}(kL) \cos(kL) + 1 = 0. \quad (16)$$

Каждому действительному корню этого уравнения  $k_n L$  соответствует значение собственной частоты колебаний. Корнями уравнения (16) являются:

$$k_1 L = 1,875; \quad k_2 L = 4,694; \quad \dots$$

При  $n \rightarrow \infty$

$$k_n L \approx \frac{2n-1}{2} \pi$$

- асимптотическая формула для больших  $n$ .

Принимая во внимание обозначение (10), для собственных частот колебаний получаем:

$$\begin{aligned} \omega_1 = \lambda \left( \frac{1,875}{L} \right)^2; \quad \omega_2 = \lambda \left( \frac{4,694}{L} \right)^2; \quad \dots, \\ \lambda^2 = \frac{EI}{\rho F_0}. \end{aligned} \quad (17)$$

Из системы уравнений (14) для каждого значения  $k_n L$  можно определить отноше-

ние  $\frac{C_3}{C_4}$ :

$$\frac{C_3}{C_4} = -\frac{\operatorname{sh}(k_n L) + \sin(k_n L)}{\operatorname{ch}(k_n L) + \cos(k_n L)},$$

так что форма нормальных колебаний определяется с точностью до постоянного множителя  $A_n$ :

$$A_n Y_n(x) = [\operatorname{sh}(k_n L) + \sin(k_n L)] [\operatorname{ch}(k_n x) - \cos(k_n x)] - [\operatorname{ch}(k_n L) + \cos(k_n L)] [\operatorname{sh}(k_n x) - \sin(k_n x)].$$

При каждом нормальном колебании имеется некоторое число точек оси балки, которые остаются неподвижными. Эти точки называются *узлами* колебаний. Те точки между узлами, в которых амплитуда колебаний максимальна, называются *пучностями*. Узел отличается от точки заземления балки тем, что помещение в узле шарнирной опоры не приведет к возникновению опорной реакции. Поэтому, если положение узлов какой-либо конструкции известно, то удобно точки опоры располагать в узлах: инерционные усилия в этом случае не будут передаваться основанию.

Положение узлов определяется из уравнения  $Y_n(x) = 0$ , т.е. из уравнения:

$$[\operatorname{sh}(k_n L) + \sin(k_n L)] [\operatorname{ch}(k_n x) - \cos(k_n x)] - [\operatorname{ch}(k_n L) + \cos(k_n L)] [\operatorname{sh}(k_n x) - \sin(k_n x)] = 0. \quad (18)$$

Вид изогнутой оси балки (нормальная форма) для первых трех нормальных колебаний показан схематически на рис.3. При колебаниях с собственной частотой  $\omega_1$  неподвижной остается только точка закрепления (рис.3,а). При колебаниях с частотой  $\omega_2$  имеется один узел (рис.3,б). При колебаниях с частотой  $\omega_3$  появляются две узловых точки (рис. 3, в).

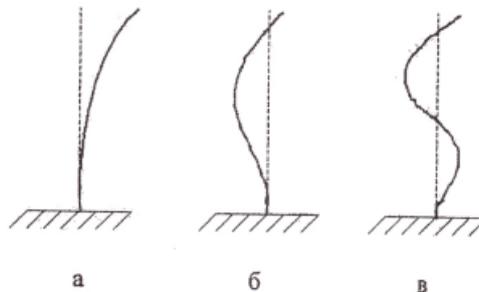


Рис. 3: Формы нормальных колебаний балки при  $n = 1; 2 : 3$ .

Подсчеты показывают (см., например, [2]), что положения узлов определяются следующими числами, дающими отношение расстояния узла от свободного конца балки

к длине балки.

Порядковый номер нормального колебания	Положения узлов колебания		
	1-й	2-й	3-й
I	-	-	-
II	0,226	-	-
III	0,132	0,499	-
IV	0,094	0,356	0,6439

При наличии этих узловых точек можно в опытах судить о том, что балка совершает одно из нормальных колебаний.

### 3 Экспериментальная часть

Лабораторная установка (рис. 4) представляет собой опору с закрепленной на ней балкой. Крепление балки на опоре можно рассматривать как жесткую заделку (балка устанавливается на резьбовое соединение в опоре). Резьбовое соединение позволяет заменять исследуемую балку для проведения задачи с разными материалами балки и разными геометрическими характеристиками.

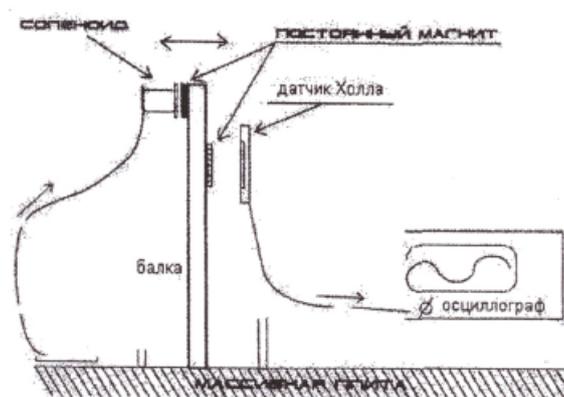


Рис. 4: Схема экспериментальной установки.

Для возбуждения колебаний исследуемой балки используется электромагнитная катушка (соленоид), подключенная к источнику переменного напряжения. Частота колебаний переменного напряжения на соленоиде регулируется генератором низкой частоты. Формирующееся переменное магнитное поле воздействует на небольшой магнит, закрепляемый на свободном конце балки. Маленькие размеры магнита позволяют не учитывать его вес и размеры при расчете геометрических характеристик балки.

Малые возмущения, прилагаемые к балке, приводят к незначительным изгибным колебаниям. При изменении частоты колебаний, достигается момент значительного увеличения амплитуды колебания балки. Это означает совпадение частоты прилагаемого возмущения с частотой собственных колебаний балки. При изменении частоты возбуждения в широких пределах можно обнаружить несколько моментов, когда амплитуда колебаний возрастает. Это означает, что балка испытывает колебания с собственной частотой, или с частотой гармоник, соответствующих собственной частоте колебаний балки.

Регистрация амплитуды колебаний балки выполняется с помощью аналогового датчика Холла.

Датчик Холла имеет линейную характеристику зависимости величины наведенного магнитного поля и амплитуды регистрируемого сигнала. В начальный момент (состояние покоя) на датчике вырабатывается некоторая постоянная составляющая сигнала, которая определяет среднюю линию осциллограммы. Отклонение балки с закрепленным на ней магнитом приводит к изменению наведенного на датчик магнитного поля. Изменение положения балки отображается на осциллограмме как изменение амплитуды сигнала.

В качестве осциллографа используется компьютер со встроенной картой аналого-цифрового преобразователя. Опрос АЦП осуществляется программой регистрации.

Программа регистрации состоит из двух модулей: модуль прямого отображения на экран (не регламентируемая частота опроса сигнала) и модуль регистрации, позволяющий с заданной точностью выполнять измерение исследуемого сигнала. Функция прямого отображения сигнала предназначена для настройки аппаратуры, для проверки правильности закрепления магнита на балку и для контроля работоспособности системы измерений в целом. В режиме отображения контролируется амплитуда колебаний балки при изменении частоты приложенного воздействия. После приготовления установки к работе, включается режим регистрации и производится опыт по исследованию колебаний балки.

Работа установки по исследованию собственных колебаний консольно закрепленной балки возможна в режиме без электромагнитного возбуждения колебаний. Консольно закрепленная балка представляет собой аналог музыкального камертона. Частота собственных колебаний исследуемых моделей балок лежит за пределами музыкального диапазона. Для проведения эксперимента регистрирующая аппаратура включается, и к балке прикладывается возмущающее воздействие (щелчок). Щелчок должен вызвать колебания балки на первой гармонике. Присутствие других частот колебаний можно воспринять на слух (характерный дребезг) и наблюдать на осцилло-

грамме спектрального представления колебаний. В случае точного воспроизведения поперечных изгибных колебаний, на спектрограмме наблюдается единственный максимум на частоте, близкой к расчетной для данной балки.

Анализ частот вынужденных или собственных колебаний проводится по осциллограмме. Зарегистрированный с помощью датчика Холла период колебаний отображается на экране компьютера для дальнейшей обработки, рис.5(а). С помощью функции "КУРСОР" устанавливается метка времени для первого рассматриваемого колебания и для последнего из серии исследуемых колебаний. По таблице координат курсоров определяется время, за которое получилось выбранное количество колебаний. Частота колебаний данной балки вычисляется по формуле:

$$\omega_3 = \frac{2\pi}{T}.$$

В программе опроса и регистрации сигнала присутствует функция определения частоты колебаний измеренного сигнала, рис.5(б)

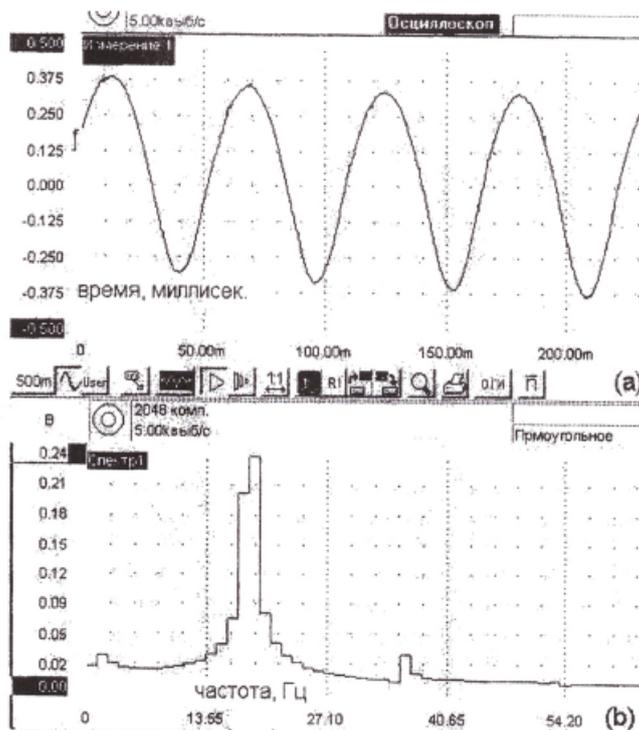


Рис. 5: Осциллограмма колебаний балки (а) и спектральная характеристика колебаний (б).

## 4 Определение модулей упругости из динамического эксперимента

Опыты по изгибным колебаниям стержней могут служить не только для определения собственных частот и форм нормальных колебаний конструкций или их элементов, но и для другой важной цели - для определения механических характеристик материалов.

Механические характеристики (модули упругости, предел упругости и т.п.) зависят в той или иной мере от скорости деформации. В опытах на колебания, регулируя частоту вынуждающей силы и амплитуду колебаний, можно в довольно широких пределах изменять скорость деформации.

В формулы для определения собственных частот колебаний входят модули упругости материала. Если в этих формулах собственные частоты определять из опытов, то искомыми величинами можно считать значения модулей упругости при соответствующей скорости деформации. Например, в случае изгибных колебаний по формуле (10) находим:

$$E = \omega^2 \rho F_0 I^{-1} k^{-4}$$

Если вместо  $\omega$  подставить измеренную в опыте собственную частоту  $\omega_n$ , а вместо  $kL$  - соответствующее значение корня уравнения частот (16), то для значения модуля продольной упругости при этой частоте получим:

$$E_n = \frac{\omega_n^2 \rho F_0 L^4}{I (k_n L)^4}$$

Для большинства металлов изменение модуля продольной упругости слабо зависит от скорости деформации, так что при динамических испытаниях получаются значения  $E$ , близкие к тем, которые обычно определяют в статическом эксперименте.

## 5 Порядок выполнения эксперимента

1. Измерить продольные и поперечные размеры испытуемой балки,  $L$ ,  $a$ .
2. Провести эксперимент, зафиксировать показания осциллографа.
3. Определить периоды и частоты собственных колебаний, рис.5.

## 6 Обработка и анализ результатов

В протокол задачи включается:

1. Экспериментальные значения собственных частот колебаний  $\omega_{\text{эксп}}$
2. Теоретические значения собственных частот колебаний  $\omega_{\text{теор}}$  полученные по формулам (17).
3. Вычисленные по данным опытов значения модуля продольной упругости,  $E_n$ , по формуле (19).

Результаты расчетов представить в таблице:

№	$E$ (МПа)	$\rho$ (кг/м <sup>3</sup> )	$L$ (м)	$a$ (м)	$I = \frac{\pi a^4}{4}$ (м <sup>4</sup> )	$\omega_{\text{эксп}}$ (Гц)	$\omega_{\text{теор}}$ (Гц)	$E_n$ (МПа)

## 7 Историческая справка

В 1660 г. английский ученый Р. Гук обнаружил, что при растяжении стержня его удлинение пропорционально растягивающей силе. Прошло около 200 лет, с тех пор, когда опыты с упругими материалами проводили Бойль, Кулон, Навье и некоторые другие физики. Одним из основных опытов стало растяжение пробного стержня из изучаемого материала. Для сравнения результатов, полученных в разных лабораториях, нужно было либо использовать всегда одинаковые образцы, либо научиться исключать влияние размеров образца. И в 1807 появилась книга Томаса Юнга, в которой был введен модуль упругости - величина, описывающая свойство упругости материала независимо от формы и размеров образца, который использовался в опыте. Для этого нужно силу, приложенную к образцу, разделить на площадь сечения, а произошедшее

при этом удлинение разделить на первоначальную длину образца. Соответствующие отношения - это напряжение  $\sigma$  и деформация  $\varepsilon$ . Теперь закон Гука о пропорциональности можно записать в виде:

$$\sigma = E\varepsilon$$

Коэффициент пропорциональности  $E$  называется модулем Юнга, имеет размерность, как у напряжения ( $МПа$ ), а обозначение его есть первая буква латинского слова *elasticitat* - упругость.

Если измерять величину модуля  $E$  в мегапаскалях ( $МПа$ ), получатся такие средние значения:

Материал	Модуль Юнга, $E$ $МПа$
Сталь	$20 \cdot 10^4$
Медь	$10 \cdot 10^4$
Алюминий	$7 \cdot 10^4$
Стекло	$7 \cdot 10^4$
Кость	$3 \cdot 10^4$
Дерево	$1 \cdot 10^4$
Резина	$0,001 \cdot 10^4$

# Литература

1. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. С. 207-213.
2. Rayleigh L. The theory of sound. V. I. London, 1926. (Рэлей Д. Теория звука. Т. 1. М., Гостехиздат, 1955, 503 с.)
3. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т.2. М.: Наука, 1973. С. 391-400.