

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

**ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ  
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ**

**ПРОДОЛЬНОЕ СОУДАРЕНИЕ УПРУГИХ  
СТЕРЖНЕЙ**

Задача практикума по механике  
Под редакцией академика РАН Е.И. Шемякина

2023

УДК 516  
ББК 22.2  
П 78

Авторы: Александрова О.В., Бородина С.И., Звягин А.В., Зубков А.В., Колпаков В.П., Сагомоян Е.А., Шамина А.А.

Рецензент: доктор физ.-мат. наук А.Б. Киселев.

Продольное соударение упругих стержней. Задача практикума по механике./ Под ред. акад. Е.И. Шемякина — М.: Изд-во Моск. ун-та, 2023. — 26 с.

ISBN

Учебное пособие содержит задачу о продольном соударении упругих стержней, выполняемую студентами механико - математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова в рамках общего лабораторного практикума. Студенты знакомятся с методами и техникой исследования задачи и приобретают навыки в постановке и проведении физического эксперимента с использованием современных компьютерных технологий. Пособие может быть полезно также преподавателям ВУЗов, знакомит с феноменологией современной механики в соединении с теоретическими подходами к ней.

ISBN

©Московский государственный университет, 2023

# Цель задачи

Все динамические процессы в реальных средах сопровождаются распространением и взаимодействием волн. Они могут взаимодействовать друг с другом, с границами раздела сред. Физически природа волн может быть разной. Часто слово «волна» ассоциируется с колебательными процессами в поле сил тяжести. В твердых телах существование волн обеспечивается упругим взаимодействием частиц среды. Самое главное заключается в том, что все типы волн, независимо от механизмов обеспечивающих их существование, обладают целым рядом общих свойств. К важнейшим из них относится взаимодействие волн с границами раздела разных сред. Отмечено, что многие важные характеристики волн, например, скорость, меняются в зависимости от присутствия или отсутствия границ.

Целью данной работы является ознакомление с некоторыми из таких свойств на примере распространения продольных волн в упругих стержнях.

## 1. Описание явления

В данной задаче, несмотря на кажущуюся простоту явления, присутствуют очень тонкие эффекты, связанные, прежде всего с наличием границ разного типа. Торцы стержней, боковая поверхность, поверхность раздела разных стержней – все это присутствует в рассматриваемой задаче соударения стержней.

В некоторых случаях в сплошной среде возникают волны сильного разрыва, когда на фронте волны разрывны сами искомые функции. В курсе уравнений математической физики доказывается, что для линейных уравнений, скорость распространения волн сильного разрыва совпадает со скоростью распространения малых возмущений, т.е. со скоростью волн слабого разрыва. В рассматриваемой задаче соударения упругих стержней это свойство реализуется и проверяется на практике.

Кроме того, при выполнении данной задачи представляется возможность ознакомления с экспериментальными методами регистра-

ции быстро протекающих динамических процессов, имеющих волновой характер. Взаимодействие волн с границами определяются физически реализуемыми граничными условиями.

Еще одна цель, которая преследуется — это постановка корректных начальных и граничных условий в динамической задаче, что необходимо уметь делать каждому механику, моделирующему конкретное явление.

Например, если на границе среды нет приложенных сил, значит вектор напряжений на такой поверхности (сила, приходящаяся на единицу площади) равен нулю. Такую поверхность называют «свободной» (имеется ввиду от напряжений).

Другим типом границы является поверхность контакта двух сред. Для физической реализации контакта необходимо выполнения ряда условий. Часть из них носит кинематический характер. На контактной поверхности должны быть обязательно равны нормальные к поверхности составляющие вектора скорости. Если это условие не выполнено, то произойдет взаимопроникание сред или разрыв сплошности. Другая часть условий зависит от физической реализации условий контакта. Если обеспечиваются условия полного прилипания, то и касательные составляющие скорости равны.

Физическим условием контакта является равенство векторов напряжения по разные стороны поверхности раздела. По сути — это следствие третьего закона Ньютона. Но при этом условие контакта должно быть реализуемо физически. Если на поверхности раздела твердых тел нет склейки, то нормальное напряжение на такой площадке физически не может быть растягивающим, поскольку при любом растяжении среды разойдутся и контакта не будет.

## 2. Теоретическая часть

### 2.1. Теория распространения малых возмущений в упругой среде

Как показывает практика, скорость волн в безграничной среде существенно отлична от скорости в ограниченной среде. Особенно это характерно для упругой среды. Движение такой среды в силу отсутствия границ описывается уравнениями Ламе [1]:

$$\rho \ddot{\mathbf{U}} = (\lambda + \mu) \text{grad div } \mathbf{U} + \mu \Delta \mathbf{U}. \quad (1)$$

Будем искать решение уравнения (1) в виде:

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 f(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} - ct), \quad (2)$$

где вектор  $\mathbf{U}_0$  - называется вектором поляризации волны,  $\mathbf{x}$  - радиус вектор точек фронта волны,  $c$  - фазовой скоростью фронта волны. Уравнение фронта волны представляет из себя плоскость  $n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 - ct = \text{const}$ , которая перемещается по нормали  $\mathbf{n}$  со скоростью  $c$ . Поэтому такие волны часто называют плоскими.

Подстановка (2) в (1) приводит к уравнению

$$\rho U_{0i} c^2 f'' = (\lambda + \mu) U_{0k} n_k n_i f'' + \mu U_{0i} n_k n_k f'',$$

которое дает уравнения для определения векторов поляризации и соответствующим этим векторам фазовых скоростей волн. Рассмотрим волны продольной поляризации, тогда вектор поляризации направлен по нормали к фронту, т.е.  $\mathbf{U}_0 = k\mathbf{n}$ . Это приводит к следующему значению скорости продольных волн  $C_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$ .

Аналогично, если рассмотреть волны поперечной поляризации, когда вектор поляризации направлен по касательной к фронту волны  $\mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{n} = 0$ , получаем скорость поперечных волн  $C_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ .

Покажем, что если продольная волна бежит вдоль стержня, то наличие свободной боковой поверхности приведет к изменению ско-

рости волны. Рассмотрим для простоты стержень квадратного сечения. По определению, стержнем называется такое тело, у которого два характерных поперечных размера пренебрежимо малы по сравнению с третьим – длиной. На боковых поверхностях стержня отсутствуют усилия, т.е. они являются свободными границами. Отсюда следует, что на них векторы напряжений равны нулю:

$$\begin{aligned} y = \pm h, \sigma_{yy} = 0, \sigma_{yx} = 0, \sigma_{yz} = 0 \\ z = \pm h, \sigma_{zz} = 0, \sigma_{zx} = 0, \sigma_{zy} = 0. \end{aligned}$$

Здесь ось  $X$  направлена вдоль оси стержня, а оси  $Y$  и  $Z$  лежат в сечении, перпендикулярном оси.

Поскольку напряжения равны нулю на границе и являются непрерывными можно полагать в силу малости толщины стержня, что внутри сечения они мало отличаются от нуля. Тогда из закона Гука, записанного в общем виде,  $\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij}$ , следует, что:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}\sigma_{xx}, \varepsilon_{yy} = -\nu\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{zz} = -\nu\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0.$$

Равенство всех смешанных компонент тензора деформаций нулю означает, что углы при деформации не меняются и плоские сечения  $x = const$  остаются плоскими. Это позволяет рассматривать продольное движение сечений стержня, как одномерное и считать, что продольное смещение  $U$  однородно по сечению, т.е.

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial z} = 0.$$

Если ввести лагранжеву координату  $\xi$ , как начальную координату каждого сечения  $x = const$ , то можно ввести перемещение сечений

$$U = x(\xi, t) - \xi. \quad (3)$$

Тогда скорость и деформация вдоль оси стержня выразятся с помощью перемещения

$$V(\xi, t) = \frac{\partial U}{\partial t}; \varepsilon = \frac{\partial U}{\partial \xi}. \quad (4)$$

Уравнения движения малого элемента стержня (Рис. 1) представляется в форме  $\rho \Delta \xi S_0 \frac{\partial V}{\partial t} = S_0 [\sigma(\xi + \Delta \xi, t) - \sigma(\xi, t)]$ , которая после деления на объем элемента и предельного перехода переходит в уравнение

$$\rho \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial \xi}, \quad (5)$$

где  $\sigma$  - напряжение, действующее в сечении.

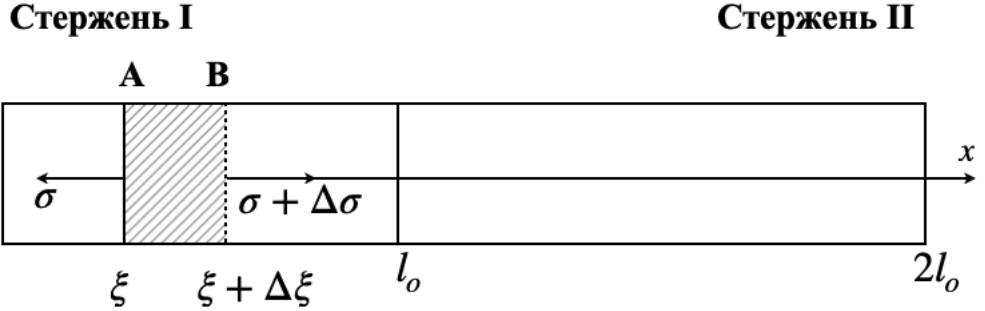


Рис. 1

В силу гипотезы плоских сечений закон Гука имеет очень простую форму  $\sigma = E\varepsilon$ . В согласии с этим и с учетом уравнений (4), (5), получается волновое уравнение для перемещения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}, \quad a_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (6)$$

Легко проверить, что такому уравнению удовлетворяет и деформация. Для скорости и деформации легко получить систему уравнений первого порядка, эквивалентную уравнению второго порядка (4):

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial \xi} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \\ \frac{\partial V}{\partial t} = a_0^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} \end{cases} \quad (7)$$

Покажем, что величина  $a_0$  является скоростью распространения возмущений в стержнях. Если в уравнении (6) перейти к новым независимым переменным

$$\begin{aligned} q &= \xi - a_0 t \\ r &= \xi + a_0 t, \end{aligned} \quad (8)$$

уравнение (6) примет вид

$$\frac{\partial^2 U}{\partial q \partial r} = 0. \quad (9)$$

Общий вид решения уравнения (9) представляет сумму двух произвольных функций, одна из которых зависит от переменной  $q$ , а вторая от  $r$ . Это позволяет записать его в следующей форме:

$$U(\xi, t) = f(\xi - a_0 t) + g(\xi + a_0 t). \quad (10)$$

Вид решения показывает, что перемещение представляет собой суперпозицию волн, одна из которых перемещается со скоростью  $a_0$  в направлении оси  $\xi$ , а другая с той же скоростью в противоположном направлении. Вид функций  $f(q)$ ,  $g(r)$  определяется начальными и граничными условиями.

Рассмотрим теперь систему уравнений (7). Сложим уравнения системы, предварительно умножив первое из них на  $d\xi$ , а второе на  $-dt$ . В результате, получим:

$$dV = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} d\xi + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} a_o^2 dt. \quad (11)$$

Будем искать в плоскости независимых переменных  $(\xi, t)$  такие кривые  $d\xi = k dt$ , на которых уравнение (11) будет записано в полных дифференциалах. Замена  $d\xi$  на  $k dt$ , и  $dt$  на  $\frac{d\xi}{k}$  позволяет переписать уравнение (11) в новом виде:

$$dV = k \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} dt + \frac{a_o^2}{k} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} d\xi. \quad (12)$$



Приравнивая коэффициенты при производных в правой части  $k = \frac{a_0^2}{k}$ , мы находим требуемые кривые (в данном случае они оказались прямыми)

$$d\xi = \pm a_0 dt, \quad (13)$$

вдоль которых должны выполняться уравнения в полных дифференциалах:

$$dV = \pm a_0 d\varepsilon. \quad (14)$$

Кривые (13) называются характеристическими линиями системы (7) или характеристиками, а уравнения (14), которые справедливы на этих линиях, называются соотношениями на характеристиках. Если количество действительных характеристик совпадает с количеством уравнений системы, такая система уравнений называется гиперболической. Отсюда можно сделать вывод о том, что рассматриваемая нами система гиперболическая. В общем случае уравнения (13), (14) не интегрируются, поскольку величина  $a_0$  может зависеть от переменных  $\xi, t$  и от самих искомых функций  $V, \varepsilon$ . Но в рассматриваемом нами случае  $a_0 = \text{const}$ , поэтому уравнения (13), (14) интегрируются:

на линиях  $\xi - a_0 t = c^+$  выполняется соотношение

$$V - a_0 \varepsilon = R^+; \quad (15)$$

на линиях  $\xi + a_0 t = c^-$  выполняется соотношение

$$V + a_0 \varepsilon = R^-.$$

Постоянные интегрирования  $R^\pm$  на каждой характеристике  $c^\pm$  могут принимать разные значения и обычно называются инвариантами Римана. Полученные выражения (10), (15) показывают, что волновое уравнение (6) и система уравнений (7) эквивалентны.

## 2.2. Волны сильного разрыва в упругих стержнях

На практике могут возникнуть ситуации, когда невозможно построить непрерывное решение. В этом случае сами дифференциальные уравнения сплошной среды неверны, поскольку при их выводе

существенным образом используется предположение о непрерывности самих функций вместе с их первыми производными. Вместе с тем интегральные формулировки основных законов физики и в этом случае позволяют получить условия на сильных разрывах, позволяющие решить исследуемую задачу. Покажем это на примере движения стержневых систем. Допустим, что по сечениям стержня распространяется сильный разрыв с законом движения  $x = x(\xi(t), t)$ . Поскольку в разные моменты времени он находится в разных сечениях, его лагранжева координата является функцией времени. Скорость движения такого разрыва можно вычислить, взяв производную по времени:

$$D = \frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dt} + \frac{\partial x}{\partial t} = (1 + \varepsilon)\dot{\xi} + V. \quad (16)$$

Уравнение (16) позволяет выписать кинематическое условие на фронте сильного разрыва, поскольку из него следует непрерывность правой части (16) при переходе через волну сильного разрыва. По сути это условие сохранения сплошности среды

$$[\varepsilon]\dot{\xi} + [V] = 0. \quad (17)$$

Рассмотрим закон изменения количества движения для выделенного фрагмента длиной  $\xi dt$ , который в момент времени  $t$  весь, за исключением одного сечения, находился перед фронтом волны. Тогда в момент  $t + dt$  он весь перейдет на другую сторону фронта. Закон изменения количества движения запишется в виде:

$$\rho S_0 \dot{\xi} dt [V] = -S_0 [\sigma] dt. \quad (18)$$

Совместное решение уравнений (17), (18) позволяет вычислить Лагранжеву скорость фронта волны и записать динамическое условие на этом фронте:

$$\dot{\xi} = \pm \sqrt{\frac{[\sigma]}{\rho[\varepsilon]}}, \quad [V] = -[\varepsilon]\dot{\xi}. \quad (19)$$

Обратим внимание на то, что в общем случае сплошной среды скорость продольных волн сильного и слабого разрыва не совпадают. Но если рассматривается линейно упругая среда, скорости совпадают  $\dot{\xi} = \pm a_0$ , а динамическое условие на сильном разрыве становится в точности условием сохранения инвариантов Римана при переходе через волну сильного разрыва. Это позволяет использовать для линейных сред все результаты, полученные в случае малых возмущений.

### 2.3. Построение решения

Для построения решения необходимо поставить начальные и граничные условия рассматриваемой задачи.

Мы будем решать задачу о соударении двух геометрически и физически одинаковых стержней. В момент соударения, который будем считать началом отсчета по времени, стержни расположены вдоль одной линии. Введем неподвижную систему координат наблюдателя  $OX$ , причем точка  $O$  совпадает с границей раздела стержней в начальный момент времени. Тогда ударяющий стержень (ударник) имеет Лагранжевы координаты  $-L < \xi < 0$ , а стержень по которому наносится удар (мишень) — координаты  $0 < \xi < L$ , где  $L$  — длина стержней. Будем считать, что в момент удара все сечения ударника движутся с постоянной скоростью  $V_0$ , и имеют деформации и напряжения, равные нулю. Мишень в начальный момент покоится и находится в недеформированном состоянии, поэтому для ее сечений и скорость и деформация в начальный момент равны нулю. В начальный момент времени перемещение равно нулю, т.к. оба стержня не деформированы. После удара начнется совместное движение стержней, но во все моменты времени движения левый торец ударника и правый торец мишени свободны от нагрузки, т.е. являются границами, свободными от напряжений. Поэтому на этих границах мы должны выполнить граничные условия в виде равенства нулю напряжений, а значит в силу закона Гука и деформаций. Граница раздела двух стержней является примером контактной поверхности. На ней, как обсуждалось ранее, необходимо выполнить

равенство напряжений и скоростей. Кроме этого, поскольку стержни не склеены, необходимо следить за тем, чтобы напряжение на границе было сжимающим. При нарушении этого условия, контакт нарушится и этот момент можно считать моментом завершения соударения. Все вышесказанное можно записать в виде следующих условий:

начальных - при  $t = 0$ :

$$\begin{aligned} -L \leq \xi \leq 0 : U = 0, \varepsilon(\xi, 0) = 0; V(\xi, 0) = V_0, \\ 0 \leq \xi \leq L : U = 0, \varepsilon(\xi, 0) = 0; V(\xi, 0) = 0, \end{aligned} \quad (20)$$

граничных - при  $\xi = \pm L$ :

$$\varepsilon(-L, t) = \varepsilon(L, t) = 0, \quad (21)$$

контактных - при  $\xi = 0$ :

$$V(0^-, t) = V(0^+, t), E\varepsilon(0^-, t) = E\varepsilon(0^+, t). \quad (22)$$

Будем искать решение (10) в форме (решение Даламбера):

$$U = \frac{\varphi(\xi - a_0 t) + \varphi(\xi + a_0 t)}{2} + \frac{1}{2a_0} \int_{\xi - a_0 t}^{\xi + a_0 t} \psi(\tau) d\tau. \quad (23)$$

Поскольку в начальный момент времени перемещение равно нулю, из (23) следует, что функция  $\varphi$  тождественно равна нулю. Тогда скорость и деформация согласно (23) равны:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} (\psi(\xi + a_0 t) + \psi(\xi - a_0 t)), \\ \varepsilon &= \frac{1}{2a_0} (\psi(\xi + a_0 t) - \psi(\xi - a_0 t)). \end{aligned}$$

Подстановка этих выражений в условия (20), (21) приводит к уравнениям:

$$\begin{aligned} \xi \in [-L; L], \psi(\xi) = V_0 \cdot H(-\xi); \\ t > 0, \psi(-L + a_0 t) = \psi(-L - a_0 t), \psi(L + a_0 t) = \psi(L - a_0 t). \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь использовано стандартное обозначение для ступенчатой функции Хевисайда:

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Первое из условий (24) задает искомую функцию на промежутке  $[-L; L]$ , а второе и третье позволяют доопределить ее во всех точках, поскольку означают нечетность функции относительно точек  $\xi = -L$  и  $\xi = L$ , а также периодичность с периодом  $4L$ .

График функции  $\psi(x)$  на длине периода показан на Рис. 2.

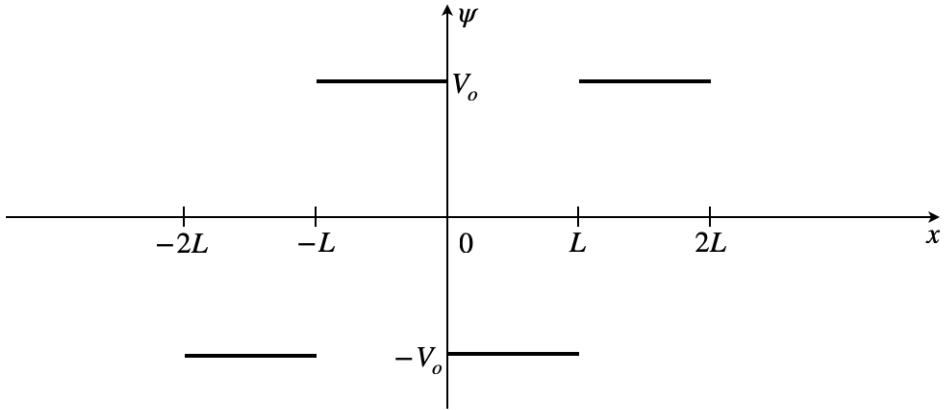


Рис. 2

Еще более наглядно представление решения в плоскости независимых переменных  $\xi, t$  (Рис.3) с помощью метода характеристик через инварианты Римана (15). Решение необходимо найти в полуполосе  $t > 0, |\xi| < L$ . Для точки  $M$  показаны значения инвариантов Римана на приходящих в нее характеристиках и получено решение для скорости и деформации.



Из соотношений (25), (26) находим решение в точке  $M$

$$V = \frac{V_0}{2}; \varepsilon = -\frac{V_0}{2a_0}.$$

Данный метод решения позволяет определить значение скорости и деформации в любой точке исследуемой области фазовой плоскости  $(\xi, t)$ .

Решения в области  $EFP$  имеют вид:

$$V = 0, \quad \varepsilon = 0;$$

в области  $GFQ$ :

$$V = V_0, \quad \varepsilon = 0.$$

Определим решение задачи в области  $PFQ$ , например, в точке  $S$ . Запишем инварианты Римана, сохраняющие свое значение вдоль характеристик  $C^+$  и  $C^-$ , пересекающихся в точке  $S$ :

$$V - a_0\varepsilon = 0, \quad V + a_0\varepsilon = V_0.$$

Откуда следует, что  $\varepsilon = \frac{V_0}{2a_0} > 0$ , что соответствует появлению растягивающих напряжений. Это, как уже было сказано, приводит к нарушению контакта. Таким образом, момент времени, соответствующий прямой  $T_0T$  фазовой плоскости, можно считать концом соударения, так как в этот момент граничное условие (22) не выполняется и происходит разлет стержней.

Таким образом, в фазовой плоскости решение поставленной задачи заключено в области  $-LT_0TL$ .

Проанализируем полученное решение. Для этого возьмем произвольную точку  $K$  стержня (мишени) и рассмотрим изменение параметров в этой точке в разные моменты времени. До момента времени, соответствующего точке  $K_1$  (момент прихода волны нагрузки), все параметры сохраняют свои начальные значения. Затем скачком меняются и остаются постоянными до момента времени, соответствующего точке  $K_2$  (момент прихода отраженной от свободного торца волны разгрузки  $GF$ ). В момент прихода волны разгрузки

параметры в данной точке снова скачком меняются, причем деформация принимает нулевое значение.

## 3. Экспериментальная часть

### 3.1. Описание установки и измерительного комплекса

Лабораторная установка представляет собой два стержня, размещенных на трапециидальном подвесе на стационарной раме (Рис. 4). Трапециидальный подвес обеспечивает параллельное перемещение ударного и исследуемого стержня во время эксперимента. В свободном состоянии стержни вывешены таким образом, что их продольные оси лежат на одной линии. Концы стержней касаются без взаимного давления. Для проведения эксперимента бойковый стержень оттягивается от положения равновесия нитью. Стержень поднимается на некоторую высоту. Схема закрепления стержня в трапециидальном подвесе обеспечивает параллельное смещение оси стержня от начального положения. При готовности измерительной аппаратуры к выполнению регистрации, стержень отпускается и бойковый стержень (2) производит продольный удар по диагностируемому стержню (1).

Для обеспечения условий продольного удара используются два длинных стержня. В результате продольного соударения стержней в стержне, воспринимающем удар, возникает деформация, распространяющаяся вдоль стержня. Деформация распространяется вдоль стержня, достигает его свободного торца и отражается от него.

Для изучения деформации элементов конструкций и, в данном случае, стержня, используются тензометрические датчики деформации (3). Чувствительным элементом датчика является калиброванная тонкая проволока, закрепленная на поверхности исследуемой детали. Сопротивление участка проводника зависит от его удельной проводимости, длины и поперечного сечения. Тензомет-



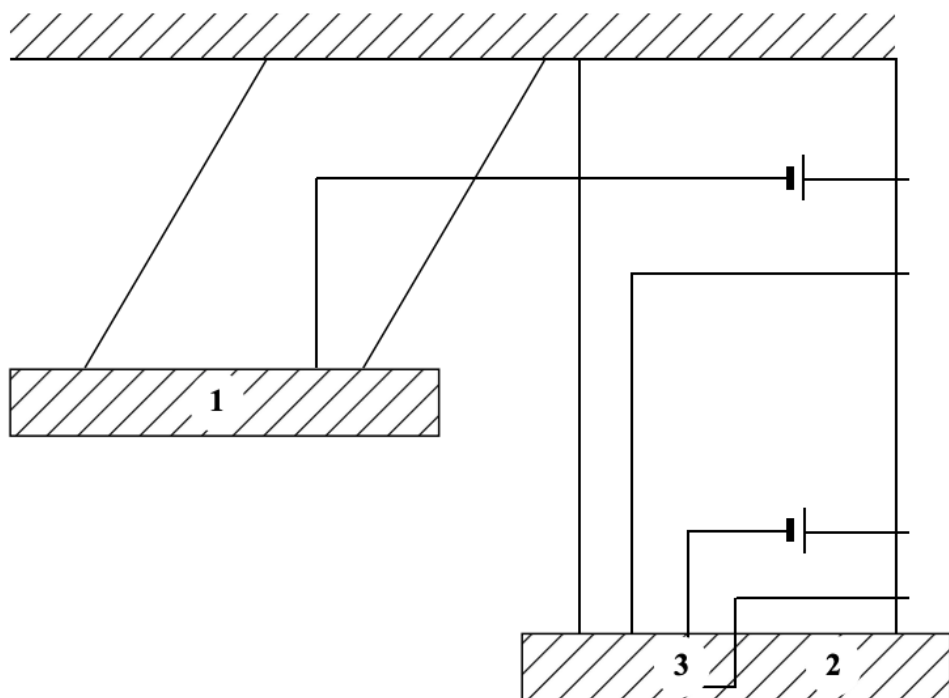


Рис. 4

рический датчик сконструирован в виде тонкой проволоки из чистой меди, уложенную на бумажную подложку специальным образом. Форма размещения проволоочки в матрице датчика имеет Z-образную форму с многократно повторяющимися участками вдоль оси датчика. Обычно датчик имеет несколько десятков параллельных участков вдоль оси нагружения датчика. Матрица датчика закрепляется (с помощью клея) на исследуемой детали, располагая ось датчика вдоль направления распространения деформации. При деформации стержня малые перемещения через клеевой слой передаются на матрицу датчика. Малые деформации детали вызывают изменение длины и изменение поперечного сечения каждого из про-

дольных проводников датчика. Деформации проволочек суммируются и регистрируются как полное изменение сопротивления датчика. Для преобразования изменения сопротивления в изменение напряжения, включаем датчик по мостовой схеме. Мостовая схема (мост Уитстона) позволяет преобразовывать малые изменения сопротивления в значительные изменения амплитуды разбаланса мостовой схемы. Функциональная зависимость изменения амплитуды напряжения от изменения сопротивления выражается формулой:

$$\omega_{\text{э}} = \frac{2\pi}{E}.$$

Для регистрации сигнала с мостовой схемы используется аналогоцифровой преобразователь (АЦП), выполненный как встраиваемая в компьютер плата. Соответствующее программное обеспечение позволяет рассматривать зарегистрированный сигнал как осциллограмму. Первичным результатом регистрации является табличная форма представления данных, где каждому отсчету АЦП соответствует отметка времени на момент отсчета (сохраняется в памяти компьютера). По окончании процедуры регистрации процесса на экране компьютера можно произвести анализ полученного результата. Программное обеспечение АЦП позволяет вывести на экран результаты двух последовательных опытов для сравнительного анализа.

## 3.2. Анализ осциллограмм

Полученный график регистрации деформации при продольном ударе стержней представляет собой трапецию. Передний порог нарастания уровня сигнала соответствует процессу постепенного продвижения волны нагружения вдоль измерительной оси датчика. С увеличением зоны, подвергшейся деформации нарастает и амплитуда измеренного сигнала. Время прохождения волны нагружения соответствует длине чувствительного элемента (в данном случае 15 мм) и скорости распространения продольных волн в заданной среде (в данном случае - сталь, плотность  $\rho = 7,810^3 \text{ кг/м}^3$ ). Длина участка трапеции, соответствующая максимальной амплитуде измеренного напряжения соответствует времени прохождения волны дефор-

мации вдоль стержня и обратно. Поскольку датчик имеет физическое несовершенство (наличие краевой зоны, не вполне продольный удар по стержню) в рассмотрение принимается момент времени, соответствующий середине порога нарастания и середине порога спада сигнала. Используя функцию "КУРСОР" можно установить отметки времени на указанные позиции графика нагружения датчика и по таблице "МОНИТОР" произвести отсчет времени двойного хода продольной волны деформации. Расстояние от середины датчика до конца стержня составляет  $L = 1,435$  м.

Для подтверждения положения, что скорость распространения продольных волн деформации не зависит от величины деформации, требуется выполнить еще один эксперимент с иной силой удара между соударяющимися стержнями. Перед проведением второго эксперимента следует запомнить изображение предыдущего результата на экране компьютера. Повторить эксперимент и произвести отсчет времени прохождения продольной волны нагружения. Следует убедиться, что датчик зафиксировал иную амплитуду деформации и показал прежнее время двойного хода продольной волны деформации.

При проведении эксперимента возможны незначительные отклонения от теоретического представления процесса. Это может быть вызвано смещением стержней от продольной оси (неаккуратное закрепление в подвесе), загрязнением ударного торца стержней (краска, забоины и пр.), проскальзывание с трением исследуемого стержня в подвесных кольцах, изгиб исследуемого стержня под действием силы тяжести. В результате проведенного эксперимента можно получить оценку погрешности лабораторной установки и теоретического решения.

## **4. Численная реализация задачи о соударении двух упругих тел**

Рассмотрим задачу о продольном соударении 2-х стержней с учетом как продольных, так и поперечных перемещений в численной

реализации.

Первый этап: построение виртуальной модели.

Задаем тип анализа — прочностной анализ. Выбираем конечные элементы и контактный элемент: стержням соответствует балочные элементы, чувствующие изменения поперечного размера и изгиб; штангам, удерживающим стержни — стержневые элементы, также чувствующие изменения поперечного размера; контактному элементу — условия взаимодействия между двумя узлами: узел стержня I (падающего) и узел стержня II (покоящегося). Модель материала задается по трем параметрам для всех конечных элементов за исключением контактного: модуль Юнга, коэффициент Пуассона, плотность материала. В системе координат  $OXYZ$  задаем ключевые точки, по ним строим прямые. Каждому конечному элементу присваиваются свои атрибуты. Построенная геометрическая модель разбивается на конечные элементы - подготовительный этап завершен (Рис. 5).

Второй этап: решение краевой задачи.

Закрепляем штанги в точках подвеса по трем координатам и во всей системе запрещаем перемещение по оси  $OZ$ . К системе прикладываем силу тяжести. Находим решение статической задачи в данной постановке.

Стержень 1 отводим на определенную высоту, разрешаем перемещение по оси  $OZ$ , шаг по времени выбираем переменный от  $0.1\text{с}$  —  $0.000001\text{с}$ , находим решение динамической задачи до момента удара. Балочные элементы позволяют учесть прогибы, возникающие в стержнях за счет действия на систему силы тяжести, именно поэтому, даже на первом этапе задача становится существенно нелинейной, но близкой к экспериментальной. Для исследования волновых процессов, обусловленных контактом, шаг по времени выбираем постоянный —  $0.00001\text{с}$ . Время контакта  $750$  —  $760$  микросекунд. Во время удара стержни обмениваются энергией. Условия контакта (с потерей энергии или нет) задаем на первом этапе. В данной постановке предполагается, что вся кинетическая энергия стержня I полностью переходит в кинетическую энергию стержня II (пренебрегаем изменением внутренней энергии системы). Во время кон-

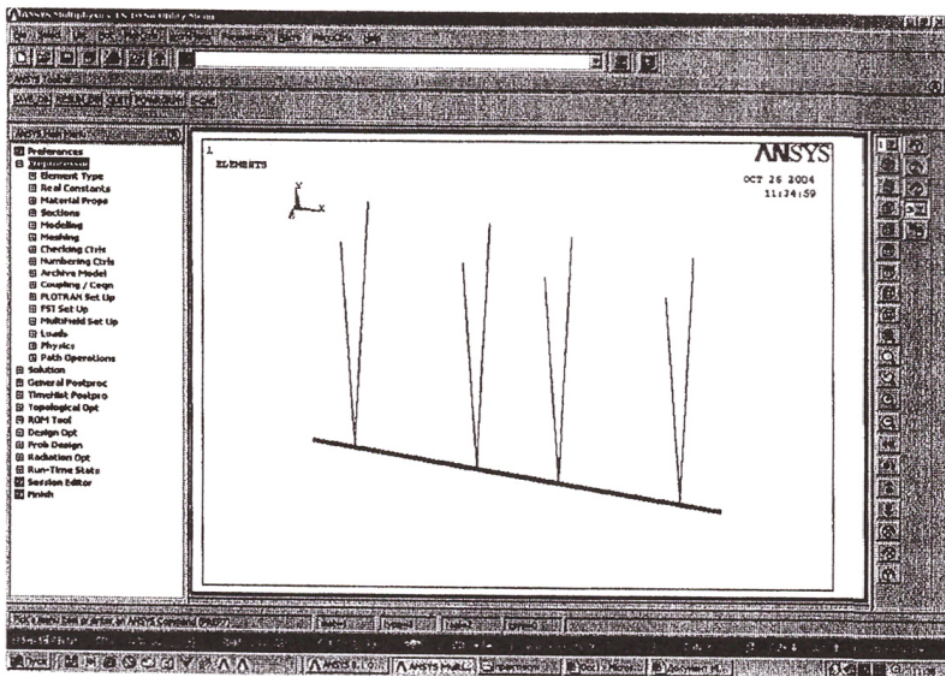


Рис. 5

такта оба стержня ведут себя как один, находящийся в состоянии равномерного сжатия. После завершения контакта стержень I останавливается, а II начинает движение, оба стержня не испытывают деформаций.

Третий этап: просмотр результатов.

Заключительный этап — определение перемещений, напряжений и деформаций в каждом элементе балки в режиме реального времени. На экране монитора наблюдаем за изменением волновой картины в упругом теле в зависимости от времени. На экран выводятся перемещения, напряжения и деформации по трем осям координат. Первоначально фронт волны прямолинейный и перпендикулярен оси стержня, по мере продвижения волны вдоль стержня вол-

новая картина изменяется: фронт отклоняется от первоначального положения и искажается, после отражения от свободного конца наблюдается волна разгрузки, фронт, которой еще больше искажается (искажения обусловлены изгибом стержней и наличием поперечных перемещений). После завершения контакта в обоих стержнях в течение некоторого времени (10-20% от времени контакта) наблюдаются волновые процессы. По амплитуде они составляют 10-15% от амплитуды падающей волны.

Скорости частиц в стержнях в момент контакта распределяются так: половина амплитуды скорости — в стержне I, половина — в стержне II, после удара стержень II приобретает первоначальную скорость стержня I, а стержень I останавливается. Из графика находим время контакта, скорости частиц в стержнях, напряжения и деформации в элементах. График зависимости деформаций от времени в элементе, с которого снимаются показания на монитор в реальном эксперименте, совпадает с графиком, полученным в численном эксперименте для этого же элемента.

Наблюдаемый в эксперименте эффект влияния поперечных перемещений присутствует и в численном эксперименте. Аналитическое решение задачи о соударении двух стержней с учетом только продольных перемещений не дает ответа на вопрос о наличии напряжений в стержнях после завершения контакта, хотя в эксперименте этот эффект наблюдается. Частично на этот вопрос дает ответ аналитическое решение задачи с учетом наличия продольных и поперечных волн. При центральном ударе поперечные перемещения составляют 5% от перемещений продольных, если удар не центральный - 10-15%, двумерная модель дает такой же порядок и виртуальный эксперимент тоже. Анализируя результаты точного одномерного решения задачи с учетом двух типов волн, эксперимента и численного решения можно оценить границы применимости одномерной модели, двумерной модели, а, в случае необходимости, найти решение численной модели.

## 5. Порядок выполнения работы

Для проведения эксперимента, включается измерительная система (компьютер, усилитель, источник питания резистивного моста). Запускается программа отображения измеренного сигнала на экран монитора. После включения измерительной аппаратуры, приступают к настройке экспериментального стенда. Выполняется соосная постановка стержней, закрепляется гибкая нить для отклонения бойкового стержня в начальное положение. Измеряется расстояние от центра датчика до свободного торца стержня. После прогрева измерительного усилителя (20-30 минут), выполняется балансировка резистивного моста. Балансировка проводится в условиях полного отсутствия деформации на датчике. Балансировка сводится к такому изменению одного из плеч моста, чтобы измерительный сигнал был равен нулю (или был близок к нулевой отметке).

После подготовки к проведению эксперимента запускается режим регистрации данных на измерительном приборе.

Первое исследование проводится при максимальном отклонении бойкового стержня. График экспериментальных данных фиксируется на экране монитора и программа регистрации приготавливается к очередной записи эксперимента. Бойковый стержень отклоняется на другую высоту начального положения и гибкая нить освобождается из зажима. График второго эксперимента так же отображается на экране монитора измерительного комплекса. По окончании эксперимента на экране монитора представлены два графика, отображающих две разные записи эксперимента.

## 6. Обработка и анализ результатов

По экрану монитора с помощью курсоров определить время прохождения волны деформации вдоль исследуемого стержня. Для этого курсор подводится к средней части переднего фронта сигнала и берется отсчет по оси времени для определения начального момента процесса продвижения волны деформации вдоль стержня. Затем курсор подводится к средней части фронта спада сигнала. Записи-

вается время окончания процесса. Для второго эксперимента так же требуется определить время продвижения волны деформации вдоль стержня при другой амплитуде нагружения.

В отчет по выполненной работе записываются:

- время прохождения волны деформации вдоль стержня;
- длина стержня от точки закрепления тензодатчика до свободного торца;
- диаметр стержня и его материал.

В результате проведенного эксперимента требуется вычислить скорость распространения волны деформации в металлическом стержне при продольном ударе.

Отчет оформляется в виде заполненной таблицы обработки осциллограмм и проведенных экспериментов и сравнения экспериментальных значений деформации и скорости звука с их теоретическими значениями.

N	V, м/с	$\Omega$ , мм	$\Omega_T$ , мм	$\varepsilon_T$	$\varepsilon_{\text{Э}}$	$\varepsilon$	T, с	L, м	$\frac{\varepsilon_{\text{Э}} - \varepsilon}{\varepsilon}$	$\frac{a - a_0}{a_0}$
1										
2										

При этом теоретические значения деформации определяются решением (Рис. 3).



## 7. Упражнения

Определить значение деформации в полубесконечном стержне при его ударе о жесткую преграду, если параметры материала стержня  $E, \rho$  известны и известна скорость соударения  $V_0$ .

Определить, пользуясь найденным решением (Рис. 3), закон движения произвольного сечения.

## 8. Контрольные вопросы

- Какие условия на контактной поверхности возникают при соударении стержней из разных материалов?
- Какова погрешность при определении скорости звука  $a$ , если считать, что погрешность измерения длины равна 1 мм, а погрешность определения времени  $10^{-6}$  с. ( $L = 143,5$  см;  $t_{\text{разв}} = 200$  мкс/см;  $a_0 = 5100$  м/с — теоретическое).
- Почему форма регистрируемого сигнала датчика деформации имеет вид трапеции?
- Почему требуется с высокой точностью установить оба стержня вдоль одной оси?
- Какое направление чувствительной оси датчика следует избрать при постановке датчика на исследуемый объект?

# Литература

1. Седов Л.И., Механика сплошной среды. Т.1,2. М.: Наука, 1970.
2. Рахматулин Х.А, Демьянов Ю.А., Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. М.: Физматгиз, 1961.
3. Гольдемит В., Удар. М.: Стройиздат, 1965.