



---

**МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА**  
**НИИ МЕХАНИКИ**  
**МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ**

Физико-механический практикум

# **Изучение процесса соударения упругих тел**

---

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ  
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

ИЗУЧЕНИЕ ПРОЦЕССА СОУДАРЕНИЯ  
УПРУГИХ ТЕЛ

Задача практикума по механике

УДК 516  
ББК 22.2

Авторы:

Рецензент:

Изучение процесса соударения упругих тел. Задача практикума по механике./ Под ред. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 2026. — с.

ISBN

Учебное пособие содержит задачу общего физико-механического практикума о продольном соударении упругих тел, выполняемую студентами третьего курса механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова. Даются навыки в постановке и проведении физического эксперимента с использованием современных компьютерных технологий. Пособие может быть полезно также студентам и преподавателям ВУЗов технического профиля.

ISBN

©Московский государственный университет, 2026

## Цель задачи

Изучение процесса соударения двух упругих тел, опирающееся на теорию Г. Герца, и экспериментальное определение величин ускорений.

## 1. Описание явления

Если упругие тела при столкновении соприкасаются выпуклыми частями поверхности, то образуется некоторая область контакта, как правило, небольшая по сравнению с размерами тел. Напряжения и деформации в области контакта создают силу взаимодействия соударяющихся тел. Впервые проблему о вычислении местных напряжений, возникающих при контактных взаимодействиях между упругими телами, поставил Г. Герц. Решив статическую задачу, он расширил область применения полученных им результатов на некоторый класс задач динамики упругих тел, наложив дополнительное ограничение на относительную скорость движения тел. Основное же допущение теории соударений Герца заключается в том, что зависимость между силой и местным смятием при статическом сжатии сохраняется и при динамических взаимодействиях тел.

Прежде чем перейти к теории соударения упругих тел, рассмотрим основные уравнения контактной проблемы по Г. Герцу.

## 2. Теоретическая часть

Предположим, что два упругих ненагруженных тела соприкасаются в некоторой точке. Допустим, что на каждое тело действует система активных сил, приводящая к равнодействующей, направленной по внешней нормали к поверхности этого тела в точке касания со вторым телом. Предположим также, что точки касания являются эллиптическими точками поверхности тел. Если тела находятся в равновесии под действием приложенных к ним активных сил и

упругих реакций, распределенных по области сжатия, то очевидно должно выполняться следующее статическое условие равновесия

$$\iint_{(\omega)} p(x, y) d\omega = P \quad (1)$$

где  $P$  - равнодействующая сил, сжимающих тела;  $p(x, y)$  - давление, распределенное по области сжатия  $\omega$ . Форма и расположение контура ограничивающей область  $\omega$ , неизвестны.

Второе уравнение вытекает из кинематических условий задачи. Поместим начало координат в точке касания поверхностей тел до начала процесса нагружения. Оси координат  $Ox$  и  $Oy$  расположим в касательной плоскости, а  $Oz_1$  и  $Oz_2$  - в направлениях внутренних нормалей к поверхностям недеформированных тел их касания.

Пусть уравнения поверхностей недеформированных тел имеют вид

$$z_1 = f_1(x, y); z_2 = f_2(x, y)$$

Тогда после сжатия уравнения поверхностей тел принимают вид

$$\begin{aligned} \bar{z}_1 &= f_1(x, y) + \omega_1 - v_1\omega_{10} - v_2\omega_{20} \\ \bar{z}_2 &= f_2(x, y) + \omega_2 - (1 - v_1)\omega_{20} - (1 - v_2)\omega_{20}. \end{aligned}$$

Здесь  $\omega_1$  и  $\omega_2$  - смещения первого и второго тел в начальной точке касания;  $v_1$  и  $v_2$  - некоторые коэффициенты, определяющие поступательные смещения тел, возникающие благодаря местному смятию поверхностей тел в окрестности начальной точки касания.

Условие контакта имеет вид  $\bar{z}_1 = \bar{z}_2$ , следовательно,

$$\omega_1 + \omega_2 = \alpha - f(x, y) \quad (2)$$

Уравнение (2) является вторым основным уравнением контактной проблемы по Г. Герцу. Здесь  $\alpha = \omega_{10} + \omega_{20}$  - сближение тел вследствие сжатия (местное сжатие);

$$f(x, y) = f_1(x, y) + f_2(x, y)$$

Учитывая аппроксимацию Герцем  $f(x, y) \sim Mx^2 + Ny^2$  и условие равновесия (1), имеем

$$A \iint_{(\omega)} \frac{p(x', y')}{r} dx' dy' = \alpha - Mx^2 - Ny^2 \quad (3)$$

где  $A = \theta_1 + \theta_2$ ;  $\theta_1 = \frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{4\pi\mu_1(\lambda_1 + \mu_1)}$ ;  $\theta_2 = \frac{\lambda_2 + 2\mu_2}{4\pi\mu_2(\lambda_2 + \mu_2)}$ ,  $\lambda_i$  и  $\mu_i$  – упругие постоянные Ляме для первого и второго тел,  $p(x, y)$  – давление, распределенное по области сжатия  $\omega$ .

$$r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$$

Форма левой части уравнения (3) позволяет решить задачу, применяя теорию ньютоновского потенциала. Вид правой части уравнения (3) позволяет предположить, что это тело имеет вид чрезвычайно сплюсненного в направлении оси  $Oz$  эллипсоида. Если считать, что плотность  $\rho$  этого эллипсоида в направлении оси  $Oz$  постоянна, то его массу можно выразить в виде

$$\mathfrak{R} = 2 \iint_{(\omega)} \rho c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy = \frac{4}{3} \pi \rho abc \quad (4)$$

Сравнивая (4) с (1), видим, что это уравнение будет удовлетворено, если положить  $4\pi abc/3 = P$

$$2\rho c = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} = p(x, y)$$

или

$$p(x, y) = \frac{3P}{2\pi ab} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

Полагая на границе области сжатия  $p(x, y) = 0$ , найдем уравнение контура, ограничивающего область сжатия. Очевидно, что это есть эллипс:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

Рассмотрим левую часть уравнения (3) как потенциал эллипсоида. Заметим, что потенциал однородного эллипсоида на внешнюю точку выражается следующим образом:

$$\pi\rho abc \int_{\nu}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{a^2 + \psi} - \frac{y^2}{b^2 + \psi} - \frac{z^2}{c^2 + \psi}\right) \frac{d\psi}{[(a^2 + \psi)(b^2 + \psi)(c^2 + \psi)]^{1/2}}$$

где  $\nu$  - положительный корень уравнения

$$\frac{x^2}{a^2 + \nu} + \frac{y^2}{b^2 + \nu} + \frac{z^2}{c^2 + \nu} = 1$$

Потенциал на внутреннюю точку выражается так:

$$\pi\rho abc \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{a^2 + \psi} - \frac{y^2}{b^2 + \psi} - \frac{z^2}{c^2 + \psi}\right) \frac{d\psi}{[(a^2 + \psi)(b^2 + \psi)(c^2 + \psi)]^{1/2}}$$

Полагая  $z = 0$ ,  $c = 0$ , получим после подстановки в уравнение (3):

$$\frac{3}{4}(\theta_1 + \theta_2) P \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{a^2 + \psi} - \frac{y^2}{b^2 + \psi}\right) \frac{d\psi}{[(a^2 + \psi)(b^2 + \psi)\psi]^{1/2}} =$$

$$= \alpha - Mx^2 - Ny^2$$

Отсюда находим, приравнявая коэффициенты при  $x$  и  $y$  в левой и правой частях уравнения (5):

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{3}{4}(\theta_1 + \theta_2) P \int_0^{\infty} \frac{d\psi}{[(a^2 + \psi)(b^2 + \psi)\psi]^{1/2}} \\ M &= \frac{3}{4}(\theta_1 + \theta_2) P \int_0^{\infty} \frac{d\psi}{(a^2 + \psi)^{3/2} [(b^2 + \psi)\psi]^{1/2}} \\ N &= \frac{3}{4}(\theta_1 + \theta_2) P \int_0^{\infty} \frac{d\psi}{(b^2 + \psi)^{3/2} [(a^2 + \psi)\psi]^{1/2}} \end{aligned} \quad (6)$$

Заметим, что  $b^2/a^2 = 1 - e^2$ , где  $e$  - эксцентриситет эллипса. Положим  $\psi = a^2\xi$ , тогда

$$Ma^3 = \frac{3}{4}P(\theta_1 + \theta_2) \int_0^\infty \frac{d\xi}{(1 + \xi)^{3/2} [\xi(\xi + 1 - e^2)]^{1/2}} \quad (7)$$

Из первого уравнения (6) и уравнения (7) можно установить зависимость между  $\alpha$  и  $P$

$$\alpha = \frac{3P}{4a}(\theta_1 + \theta_2) \int_0^\infty \frac{d\xi}{[(1 + \xi)(\xi + 1 - e^2)\xi]^{1/2}},$$

$$a = \sqrt[3]{\frac{3(\theta_1 + \theta_2)}{4M} \int_0^\infty \frac{d\xi}{(1 + \xi)^{3/2} [\xi(\xi + 1 - e^2)]^{1/2}}} \cdot P^{1/3}.$$

Следовательно,

$$\alpha = kP^{2/3} \text{ или } P = k_1\alpha^{3/2}, \quad (8)$$

где  $k = 1/k_1^{3/2}$

$$k = \left[ \frac{3}{4}(\theta_1 + \theta_2) \right]^{\frac{2}{3}} M^{\frac{1}{3}} \frac{\int_0^\infty \frac{d\xi}{[(1 + \xi)(\xi + 1 - e^2)\xi]^{\frac{1}{2}}}}{\sqrt[3]{\int_0^\infty \frac{d\xi}{(1 + \xi)^{\frac{3}{2}} [\xi(\xi + 1 - e^2)]^{\frac{1}{2}}}}}$$

Зависимость между силой  $P$  и местным смятием  $\alpha$  (8) при статическом сжатии Герц счел возможным распространить на теорию соударений упругих тел.

Рассмотрим соударение двух упругих тел, движущихся поступательно. Скорости в момент соударения предположим направленными вдоль нормали в месте контакта тел. Расположим оси координат и  $O$  касательной плоскости, а оси  $Oz_1$  и  $Oz_2$  – в направлениях нормалей. Тогда дифференциальные уравнения движения центров инерции тел вдоль соответствующих осей  $Oz_1$  и  $Oz_2$  (рис.1) имеют вид:

$$m_1 \frac{d^2 z_{1c}}{dt^2} = P, \quad m_2 \frac{d^2 z_{2c}}{dt^2} = P \quad (9)$$

где  $m_1$  и  $m_2$  - массы тел,  $z_{1c}$  и  $z_{2c}$  - координаты их центров инерции в обусловленных выше координатных системах,  $P$  - проекции главного вектора сил взаимодействия на оси  $Oz_1$  и  $Oz_2$ .

Пусть координаты центров инерции тел в начале контакта будут  $z_{1c}$  и  $z_{2c}$ . Принимая, что относительные смещения центров инерции зависят исключительно от местного сжатия (т.е. пренебрегая всеми деформациями, кроме местных), можем написать равенства

$$\begin{aligned} z_{1c} &= z_{1c0} - \nu_1 \omega_{10} - \nu_2 \omega_{20}, \\ z_{2c} &= z_{2c0} - (1 - \nu_1) \omega_{10} - (1 - \nu_2) \omega_{20}, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $\omega_{10}$  и  $\omega_{20}$  - смещения 1-го и 2-го тел в начальной точке касания,  $\nu_1$  и  $\nu_2$  - некоторые коэффициенты. Отсюда

$$z_{1c} + z_{2c} = z_{1c0} + z_{2c0} - \alpha,$$

где  $\alpha = \omega_{10} + \omega_{20}$  - сближение тел вследствие сжатия.

Дифференцируя это равенство по времени и пользуясь уравнением (9), получаем

$$m_1 \left( \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{d^2 z_{2c}}{dt^2} \right) = -P.$$

Исключая  $d^2 z_{2c}/dt^2$ , находим

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -P \quad (11)$$

С учетом зависимости (8) уравнение (11) приобретает вид

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -k_1 k_2 \alpha^{3/2} \quad (12)$$

где

$$k_2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Умножая левую и правую части (12) на  $\dot{\alpha} = d\alpha/dt$  и исключая дифференцирование по  $t$ , получим

$$\frac{1}{2} (\dot{\alpha}^2 - V_0^2) = -\frac{2}{5} k_1 k_2 \alpha^{5/2}, \quad (13)$$

$$\alpha_{\max} = \left( \frac{5}{k_1 k_2} \right)^{2/5} \left( \frac{V_0}{2} \right)^{4/5}, \quad (14)$$

$$P_{\max} = k_1 \left( \frac{5}{4} \frac{V_0^2}{k_1 k_2} \right)^{3/5}. \quad (15)$$

## 3. Экспериментальная часть

### 3.1. Описание установки

На рисунке показана схема установки по изучению соударения двух упругих тел. Тела представляют собой массивные цилиндры, изготовленные из стали. Диаметры и массы тел одинаковы. Первое тело (боек) с одной стороны имеет торец с усеченным конусом, оканчивающийся поверхностью сферической формы. Радиус кривизны

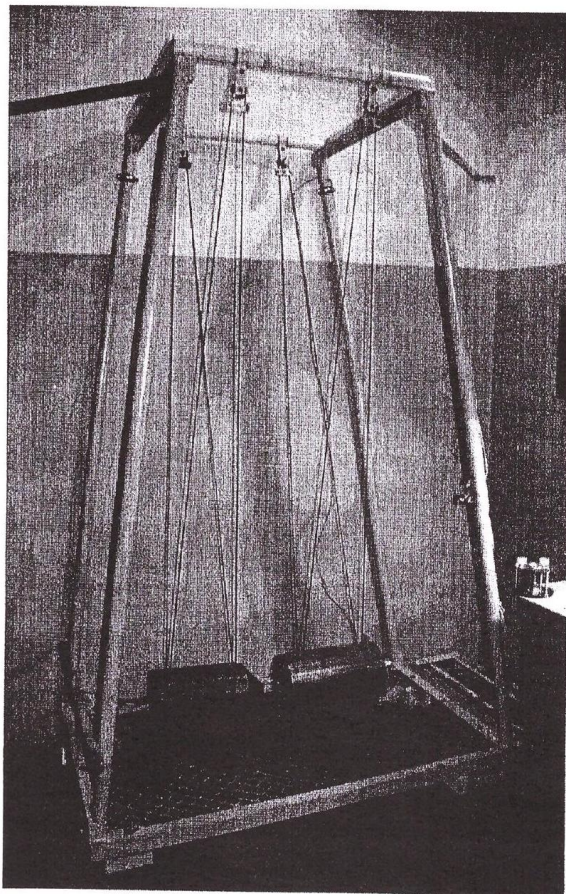


Рис. 1: Схема установки]

сферической поверхности  $R$ . Другой торец этого тела плоский. Вто-

рое тело имеет оба плоских торца, перпендикулярных оси цилиндра. При соударении боек сталкивается плоским торцом второго тела. Исследуемые тела закреплены в трапецеидальном подвесе. Оси тел горизонтальны. Схема закрепления обеспечивает положение оси обоих тел на одной горизонтальной линии. В исходном положении криволинейная поверхность бойка касается центра плоского торца второго тела. На свободном торце второго тела установлен датчик для измерения ускорения (акселерометр).

### 3.2 Описание акселерометра

Акселерометр (лат. *accelero* - ускоряю и греч. *metrḗō* - измеряю) – прибор, измеряющий проекцию кажущегося ускорения (разность между абсолютным ускорением объекта и ускорением свободного падения). Акселерометр производит измерение ускорения (изменения скорости) всего, к чему он прикреплен. Как бы ни был устроен акселерометр, по своей сути - это просто свободно двигающийся вдоль определённого направления грузик на пружинке, конец которой прикреплён к корпусу акселерометра (рис. 2). "Определённое направление" и есть ось чувствительности акселерометра.

Показания акселерометра - это смещение грузика относительно своего нулевого положения, в котором пружина ни сжата, ни натянута. Предполагая, что смещение грузика от нулевого положения пропорционально силе  $T$  натяжения (сжатия) пружинки, можно считать, что акселерометр замеряет силу натяжения пружинки. Сделанное предположение - это всего лишь закон Гука.

В рассматриваемом типе акселерометров принцип определения ускорения достаточно прост и надежен: инерционная масса дает возможность измерять ускорение за счет перемещения в соответствии со вторым законом Ньютона. Основные элементы акселерометра - тело пружина и инерционная масса (ИМ). Когда скорость тела сенсора изменяется, ИМ через пружину также побуждается последовать этим изменениям. Сила, воздействующая на ИМ, является причиной изменения ее движения, поэтому пружина изгибается, и

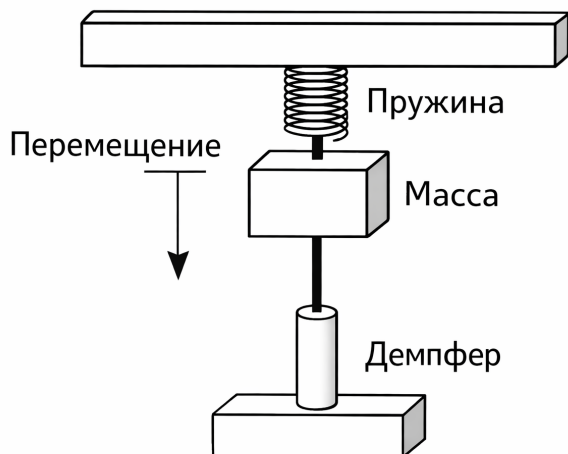


Рис. 2: Схема простейшего акселерометра.

расстояние между телом и ИМ изменяется пропорционально ускорению тела.

Рабочие принципы сенсоров различаются в зависимости от того, по какому принципу определяется движение между телом и ИМ. В емкостном сенсоре тело и ИМ изолированы друг от друга и их емкость или емкостной заряд измеряются. Когда дистанция между ними уменьшается, емкость увеличивается и электрический ток идет по направлению к сенсору. В случае, когда расстояние увеличивается, наблюдается обратная ситуация: сенсор преобразует ускорение тела в электрический ток, заряд или напряжение.

Некоторые акселерометры также имеют встроенные системы сбора и обработки данных. Это позволяет создавать завершённые системы для измерения ускорения и вибрации со всеми необходимыми элементами.

Для уменьшения влияния массы измерительного прибора на исследуемый процесс, необходимо использовать малогабаритный микроэлектронный прибор. В задаче используется датчик ускорений фирмы Freescale Semiconductor MMA6280QT ACCELEROMETER диапазон измерений  $\pm 1.5 \text{ g}/2 \text{ g}/4 \text{ g}/6 \text{ g}$ .

ММА6280QT - емкостной микромеханической акселерометр. Электронная схема прибора содержит фильтр нижних частот, температурную компенсацию. Датчик выполнен по МЭМС технологии микроэлектромеханические системы.

Характеристика используемого датчика основана на технологии емкостного измерения и хорошо подходит для определения малых изменений в движении. Чувствительный элемент для определения ускорения сделан из монокристалльного кремния и стекла. Это обеспечивает сенсору исключительную надежность, высокую точность и устойчивость показаний по отношению к воздействию времени и температуры.

Как правило, чувствительный элемент датчика с диапазоном измерений  $\pm 1$  g выдерживает как минимум 50000 ускорений (1g ускорение, вызванное силой тяжести Земли). Датчик измеряет ускорение, как в положительном, так и в отрицательном направлении, и чувствителен к статическому ускорению и вибрации. «Сердцем» акселерометра является симметричный чувствительный элемент (ЧЭ), изготовленный по технологиям объемной микромеханики, у которого есть два чувствительных конденсатора. Симметрия ЧЭ уменьшает зависимость от температуры и чувствительности по оси и улучшает линейность. Герметичность датчика обеспечивается за счет анодного соединения пластин друг с другом. Это позволяет использовать газовое демпфирование в сенсорном элементе и повышает надежность.

### 3.3. Градуировка акселерометра

Гравитация является ускорением, направленным строго вертикально в направлении центра Земли, поэтому наш акселерометр всегда будет показывать ускорение  $9,81 \text{ m/c}^2$ , если измерительная ось датчика будет ориентирована вертикально. Благодаря этому можно получить три отсчета для трех разных положений датчика.

1. Ось датчика направлена вверх, ускорение равно  $-9,81 \text{ m/c}^2$  (минус означает направление вектора к Земле).
2. Ось датчика направлена вниз, ускорение равно  $+9,81 \text{ m/c}^2$ .

3. Ось датчика горизонтальна, ускорение равно 0 (проекция ускорения гравитации на ось датчика равна нулю).

По трем измерениям строится тарировочная зависимость, и определяются градуировочные коэффициенты. Предполагая, что зависимость амплитуды сигнала от ускорения линейная (согласно паспорту на прибор) используем полученные градуировочные коэффициенты для всего рабочего диапазона.

В рабочем положении ось датчика горизонтальна и в начальный момент ускорение на датчике равно нулю.

### **3.4. Описание системы синхронизации**

Для регистрации момента касания двух тел используется система синхронизации. Система синхронизации требуется для определения момента касания тел и момента прекращения касания. При работе с одноканальным регистрирующим прибором сигнал синхронизации необходимо наложить на сигнал исследуемого процесса. В системе синхронизации используется свойство электромагнитной индукции. Электрические цепи линии синхронизации и линии измерительного сигнала связаны по трансформаторной схеме. Провод измерительной цепи имеет два витка на ферритовом кольце (здесь кольцо выступает в роли сердечника трансформатора). На этом же кольце сделано 25 витков провода линии синхроконтакта (касание двух тел). Линия синхроконтакта подключена к источнику постоянного напряжения. При замыкании цепи синхроконтакта в линии происходит мгновенное изменение напряжения от нуля до +5 вольт. Градиент напряжения в одной обмотке трансформатора (ферритовое кольцо) вызывает изменение напряжения во второй (измерительной) обмотке. Процесс замыкания длится чрезвычайно короткое время и синхросигнал, наведенный в измерительной цепи, быстро прекращается. Постоянное напряжение (в течение всего времени касания тел) вызывает подмагничивание сердечника трансформатора, но не изменяет амплитуду измерительного сигнала. При разрыве контакта между телами происходит аналогичный процесс. Мгновенно напряжение в первичной обмотке трансформатора изменяется от

+5 вольт до нуля. На осциллограмме наблюдаются два всплеска амплитуды длительностью несколько микросекунд. Первый сигнал соответствует моменту касания тел, второй всплеск означает момент прекращения контакта между телами.

### **3.5. Описание системы регистрации данных**

Для регистрации исследуемого сигнала используется запоминающий осциллограф. В данной задаче сигнал поступает на вход аналогоцифрового преобразователя (АЦП), встроенного в компьютер. Программа управления АЦП позволяет установить скорость дискретизации аналогового сигнала, определить диапазон измерительного сигнала и установить режим регистрации (включение регистрации при достижении амплитуды исследуемого сигнала определенной величины). Момент включения регистрации определяется моментом касания тел.

Исследуемый сигнал записывается в оперативную память компьютера и по окончании эксперимента переносится в файл по выбору оператора. После сохранения данных в файле, можно выполнить обработку экспериментальных данных.

### **3.6. Процедура выполнения эксперимента**

#### *1. Градуировка.*

Снять датчик ускорения со стенда и установить на горизонтальную площадку. Ось датчика горизонтальна. Записать амплитуду сигнала при отсутствии ускорения (режим вольтметра АЦП). Повернуть датчик и установить ось датчика вертикально. Измерить сигнал вольтметром. Ускорение силы тяжести направлено вниз. Определить какая сторона датчика соответствует направлению положительного ускорения. Повернуть датчик. Установить ось датчика в противоположном направлении. Измерить сигнал вольтметром

Построить тарировочную зависимость и получить градуировочные коэффициенты (средствами программы Excel).

#### *2. Эксперимент.*

С помощью шнура оттянуть боек из положения равновесия на некоторую высоту. Зафиксировать положение бойка и измерить высоту его подъема. Включить систему регистрации АЦП. Включить

питание в линии синхронизации.

Отпустить фиксирующий шнур для выполнения удара бойком по второму телу. После соударения тел притормозить колебания бойка помощью шнура.

### 3. Сохранение данных.

По окончании процесса соударения на экране компьютера отображается график. Необходимо сохранить экспериментальные данные в файл для дальнейшей обработки. Имя файла согласовывается с преподавателем. Произвести обработку результатов и заполнить таблицу экспериментальных данных.

Для анализа полученного решения выполнить соударение тел повторно при установлении бойка на другой высоте.

### 3.7. Процедура обработки экспериментальных данных

В результате выполненного эксперимента мы получаем программу процесса (рис. 3). Программа обработки данных позволяет нанести осциллограмму процесса. Программа обработки данных позволяет нанести на график курсоры, перемещать их и считывать показания места их постановки.

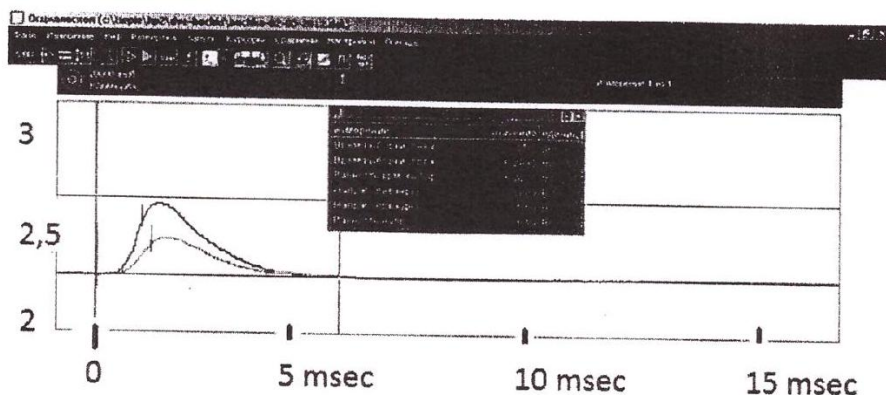


Рис. 3: Интерфейс программы.

На графике по оси ординат указано время. По оси абсцисс откладывается амплитуда сигнала в вольтах. Вертикальные курсоры позволяют перенести на ось ординат моменты начала и окончания процесса. Горизонтальные курсоры позволяют считывать показания амплитуды сигнала.

При обработке экспериментальных данных записанное значение амплитуды сигнала в вольтах следует преобразовать в единицы ускорения, используя градуировочные коэффициенты. Развитие процесса (возрастание и спад сигнала) можно наблюдать в единицах измеренного напряжения. Момент максимального ускорения для дальнейшей обработки следует преобразовать в единицы ускорения.

В результате обработки осциллограммы процесса соударения определяется зависимость  $\alpha(t)$ , в том числе  $\alpha_{\max}$ . Максимальная сила  $P_{\max}$  определяется по формуле  $P_{\max} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \alpha''$ , а также по формуле (15) с использованием данных эксперимента (массы соударяющихся тел  $m_1$  и  $m_2$  и скорости соударения). Величина  $\alpha_{\max}$  рассчитывается по формуле (14).

В заключение составляется таблица расчетных и экспериментальных величин и производится их сравнение для каждого эксперимента.

№ опыта	$h$	$V_0$	$\alpha_{\max}$	$\frac{d^2\alpha}{dt^2}$ (теор.)	$\frac{d^2\alpha}{dt^2}$ (эксп.)	$\frac{\alpha''_{\text{теор}} - \alpha''_{\text{эксп}}}{\alpha''_{\text{теор}}} \%$
---------	-----	-------	-----------------	-------------------------------------	-------------------------------------	---

Примечание: при определении  $\alpha''$  необходимо знать значения коэффициентов Ляме для материалов соударяющихся тел.

$$E = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}; \quad \sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

$$\theta_i = \frac{\lambda_i + 2\mu_i}{4\pi\mu_i(\lambda_i + \mu_i)} = \frac{1 - \sigma^2}{2\pi E}.$$

# ЛИТЕРАТУРА

1. Герц Г. Принципы механики, изложенные в новой связи (Соударение двух систем (288)) / Общ. ред. И.И.Артоболевского. - М.: Изд-во АН СССР, 1959. - 386 с.
2. Гольдсмит В. Удар. М.: Стройиздат, 1965.
3. Кильчевский Н.А. Теория соударения твердых тел. Киев: Наукова думка, 1969. - 246 с.