

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М. В. ЛОМОНОСОВА  
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ  
ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ

Задача специального физико-механического практикума

## **Многофазные течения в ячейке Хеле-Шоу**

*к.ф.-м.н. Скрылева Е.И., Манахова А.Н., Паремская Л.А.*

Москва 2026

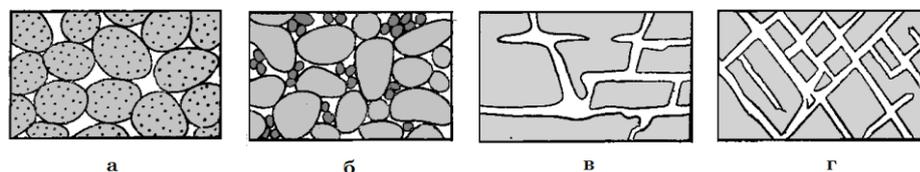
## Содержание

<b>1. Введение.....</b>	<b>2</b>
<b>2. Математическое описание течения в ячейке Хеле-Шоу. Введение поправочного коэффициента.....</b>	<b>10</b>
<b>3. Линейный анализ для неустойчивого вытеснения вязкой жидкости из ячейки Хеле-Шоу.....</b>	<b>14</b>
<b>4. Проведение эксперимента по двухфазному течению в ячейке Хеле-Шоу. Задание практикума.....</b>	<b>23</b>

# 1. Введение

## 1.1 Течения в пористой среде.

Теория фильтрации изучает движение (просачивание) жидкостей и газов в пористой среде. Под пористой средой подразумевается твёрдое тело, пронизанное сложной системой пор, каналов и трещин (рис.1, рис.2).



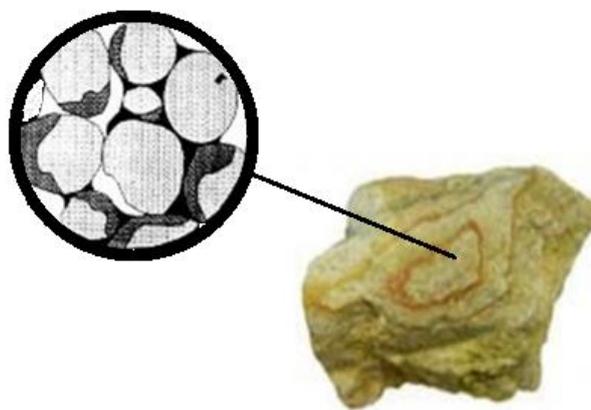
*Рис.1.Примеры пористых сред:*

*а– хорошо отсортированный песок с высокой пористостью;*

*б – плохо отсортированный песок с низкой пористостью;*

*в – поровое пространство трещиноватых известняков, частично расширенное растворением;*

*г – порода, ставшая пористой вследствие возникновения трещин.*



*Рис.2 Пример пористой среды – глинистый песчаник.*

Примеры течения в пористых средах можно встретить во многих ситуациях (рис.3): движение жидкости в очистительных фильтрах, пропитка губок или почвы, процессы подземной гидромеханики, движение углеводородов в нефтеносных пористых пластах.

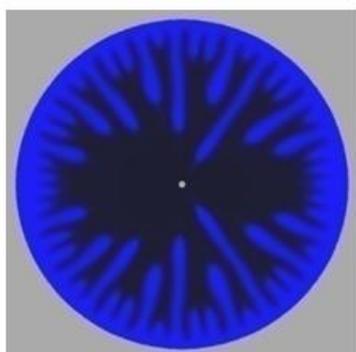


*Рис.3 Примеры фильтрационных течений.*

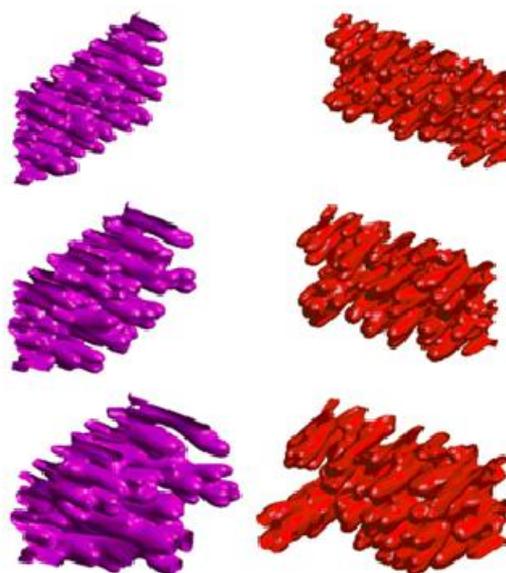
В случае, когда сквозь пористую среду происходит одновременное просачивание нескольких жидкостей или газов, могут наблюдаться различные эффекты: химические взаимодействия между фазами, капиллярные эффекты, неустойчивость границы раздела фаз. В данном пособии мы будем исследовать в том числе неустойчивость Саффмана-Тейлора (рис.4). Данный вид неустойчивости развивается на межфазной границе, когда вязкая жидкость вытесняется из пористой среды с помощью менее вязкой жидкости или газа. В случае же, когда жидкость вытесняется посредством более вязкой жидкости граница раздела остается устойчивой, такие течения также будут рассмотрены в рамках данного практикума.



а) неустойчивость, развивающаяся на фронте вытеснения



б) неустойчивость при радиальном вытеснении



в) трёхмерное моделирование неустойчивости

*Рис.4 Численное моделирование процесса вытеснения вязкой жидкости с помощью менее вязкой.*

## 1.2 Механизм возникновения неустойчивости Саффмана-Тейлора

При вытеснении вязкой жидкости, заполняющей пористую среду, другой – менее вязкой, вытесняющая жидкость стремится прорваться через слой вытесняемой и на фронте вытеснения развивается неустойчивость (рис.4)

Механизм потери устойчивости можно описать следующим образом. При движении на поверхности раздела двух жидкостей возможны локальные флуктуации скорости (давления), которые приводят к искривлению поверхности. Предположим, что изначально плоская поверхность раздела двух жидкостей слегка деформировалась, так, что появилось возмущение границы с амплитудой  $\delta x$  (рис.5).



Рис.5 Возникновение возмущения на границе раздела.

Течение подчиняется закону Дарси (предположим отсутствие массовых сил):

$$u_x = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

В вытесняющей жидкости вблизи возмущения согласно закону Дарси давление изменится на величину  $\delta p_1 = -\frac{\mu_1}{k} u_x \delta x$ , во второй жидкости - на величину  $\delta p_2 = -\frac{\mu_2}{k} u_x \delta x$ . Тогда при переходе через поверхность раздела между двумя жидкостями перепад давления составит  $\delta p = \delta p_1 - \delta p_2 = (\mu_2 - \mu_1) \frac{u_x \delta x}{k}$ .

Если перепад давления будет отрицательным ( $\mu_1 > \mu_2$ ), возникшее возмущение будет подавлено. Когда же перепад будет положительным ( $\mu_1 < \mu_2$ ) и сил поверхностного натяжения не хватит, чтобы скомпенсировать это локальное увеличение давления со стороны вытесняющей жидкости, то происходит потеря устойчивости поверхности раздела, и возмущение будет расти.

Аналогичное объяснения механизма развития неустойчивости представлено ниже.

Для прояснения механизма возникновения неустойчивости рассмотрим два случая вытеснения  $\frac{\mu_1}{\mu_2} < 1$  и  $\frac{\mu_1}{\mu_2} > 1$

Предположим, что при вытеснении жидкости с вязкостью  $\mu_2$  из прямоугольной области с помощью жидкости с вязкостью  $\mu_1$ , изначально плоская граница раздела деформировалась, и возникло небольшое возмущение.

Предположим, что  $\mu_1 < \mu_2$  (рис.6) Выберем на границе раздела три точки: А, В и С. Ниже на графике изображены распределения давления в горизонтальных сечениях проходящих через точки А, В и С.

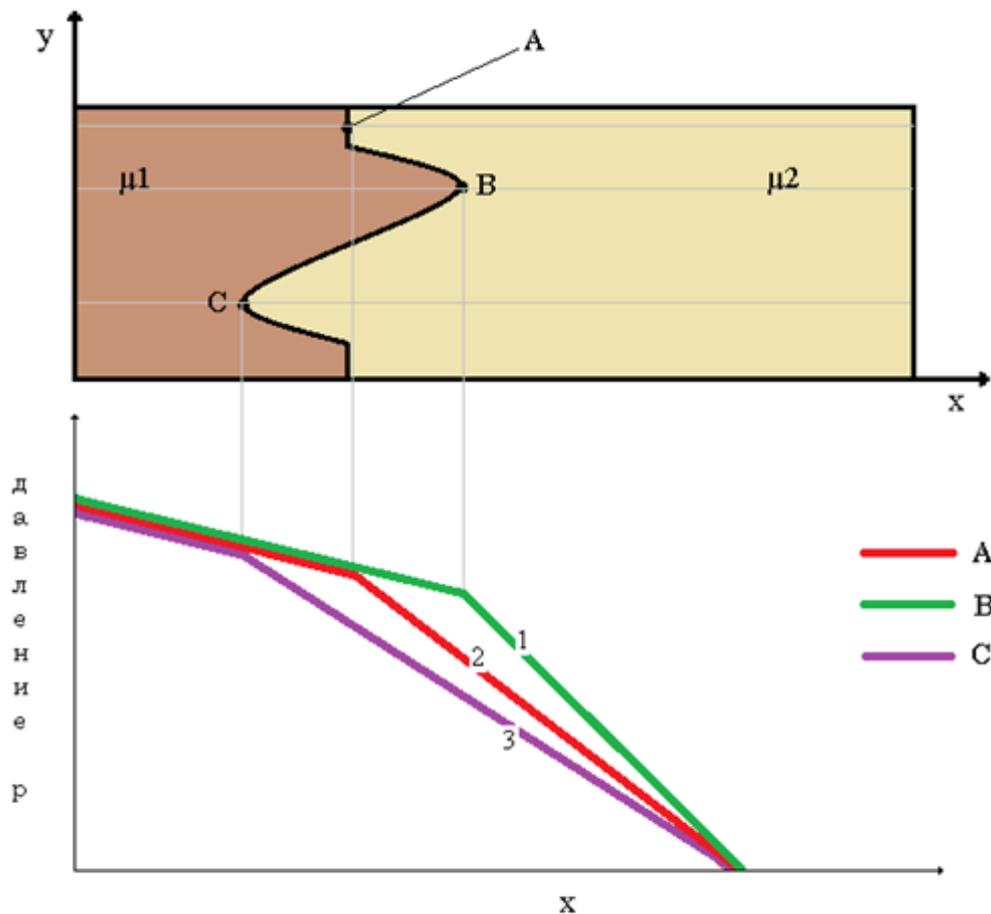


Рис.6 Распределения давления в различных сечениях при  $\frac{\mu_1}{\mu_2} < 1$

Согласно закону Дарси скорости на участках 1,2 и 3 равны соответственно:

$$u_1 = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_1$$

$$u_2 = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_2$$

$$u_3 = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_3$$

На графике видно, что  $\frac{\partial p}{\partial x} \Big|_1 < \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_2 < \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_3$  (углы наклона прямых).

Откуда  $-\frac{\partial p}{\partial x} \Big|_1 > -\frac{\partial p}{\partial x} \Big|_2 > -\frac{\partial p}{\partial x} \Big|_3$

Следовательно,  $u_1 > u_2 > u_3$  и для этого случая возмущение будет расти.

Теперь рассмотрим случай, когда  $\mu_1 > \mu_2$  (рис. 7) и сделаем то же самое.

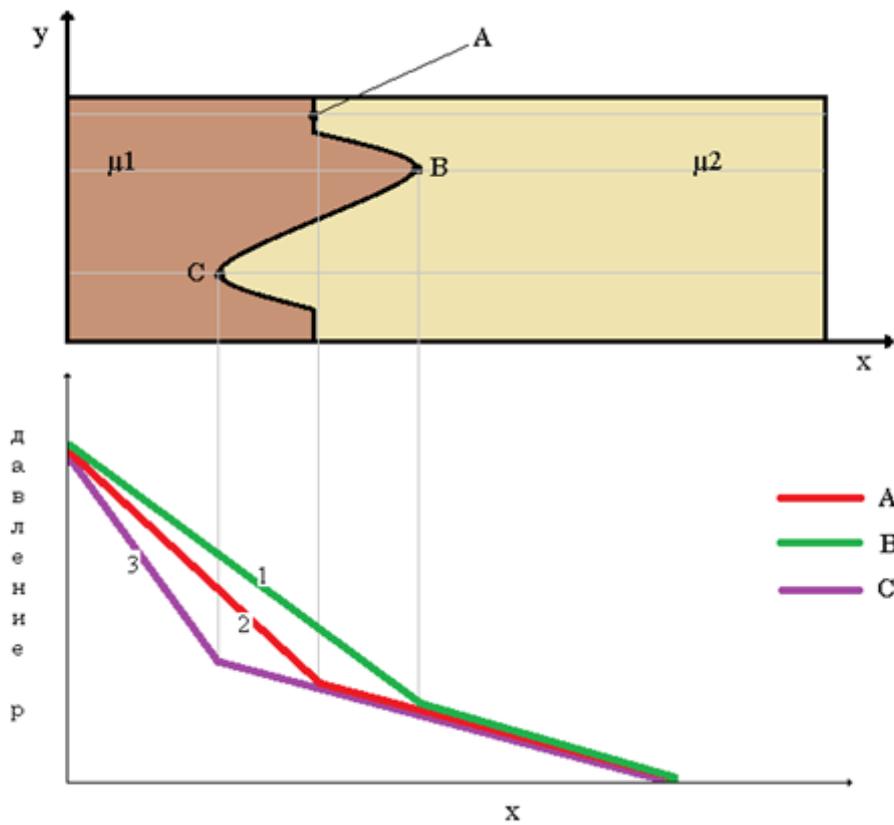


Рис.7 Распределения давления в различных сечениях при  $\frac{\mu_1}{\mu_2} > 1$

В этом случае,  $\frac{\partial p}{\partial x}|_1 > \frac{\partial p}{\partial x}|_2 > \frac{\partial p}{\partial x}|_3$ .

Следовательно,  $u_1 < u_2 < u_3$  и когда вытесняющая жидкость более вязкая возмущение будет гаснуть.



*Рис.8 Технология нефтедобычи: вытеснение нефти водой.*

Одна из технологий добычи углеводородов предполагает вытеснение нефти водой из нефтеносного пористого пласта под действием градиента давления (рис.8). При этом не менее 30-35% углеводорода, как правило, остаётся в пласте. Учитывая масштабы нефтедобычи на сегодняшний день, увеличение коэффициента извлечения нефти хотя бы на 1% равносильно введению в разработку нового крупного месторождения. Возникающая при вытеснении неустойчивость приводит к нарушению первоначально плоской формы поверхности раздела и прорыву отдельных языков («вязких пальцев») вытесняющей жидкости. В результате образования и роста языков воды возможен захват нефти внутри пористого пласта, что существенно снижает качество вытеснения и уменьшает нефтеотдачу пласта. Поэтому чрезвычайно актуальной является задача исследования неустойчивости на фронте вытеснения и методов её снижения.

### **1.3. Аналоговое моделирование. Ячейка Хеле-Шоу.**

Изучение течений в пористых средах осложняется тем, что течение внутри пористой структуры плохо визуализируется. В этом случае невозможно наблюдать границу раздела фаз в сложных многофазных потоках, например, при развитии неустойчивости Саффмана-Тейлора. Ячейка Хеле-Шоу часто используется в качестве модели пористой среды. Течения в таких ячейках легко визуализируются и описываются теми же уравнениями, что и потоки в пористых средах.

Ячейка Хеле-Шоу – это несложное приспособление, предложенное британским инженером Генри Хеле-Шоу в конце девятнадцатого века. Классическая ячейка Хеле-Шоу состоит из двух прямоугольных пластин, расположенных на малом расстоянии друг от друга – таком, что зазор между пластинами оказывается существенно меньше их ширины (Рис.9). С помощью подобных ячеек изучалось обтекание тел цилиндрической формы с различными поперечными сечениями (профилями). Тела помещались в ячейку таким образом, чтобы их основания вплотную прилегали к её пластинам. Возникающая при таком обтекании картина линий тока аналогична плоскому потенциальному обтеканию рассматриваемого профиля идеальной жидкости. Другое важное применение ячеек Хеле-Шоу было предложено в середине двадцатого века для аналогового моделирования фильтрационных течений в пористых средах.

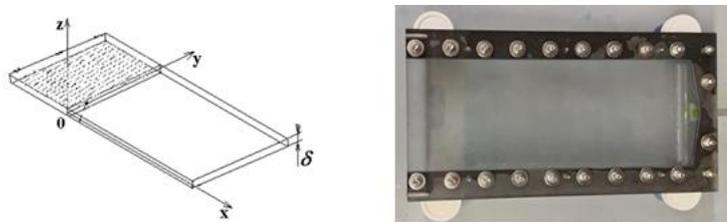


Рис.9 Прямоугольная ячейка Хеле-Шоу

Закон Дарси для описания течений в пористых средах (уравнение баланса импульса):

$$\mathbf{u} = -\frac{k}{\mu} \text{grad } p$$

$k$ - проницаемость пористой среды, измеряется в дарси (Д), 1 дарси приближённо равен  $0,9869 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2$

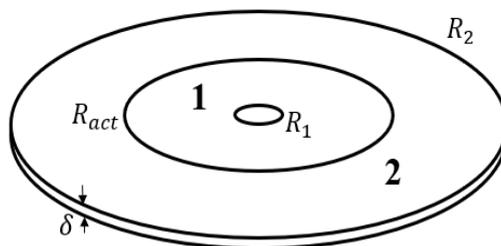


Рис.10 Радиальная ячейка Хеле-Шоу

Уравнение описывающее течение в ячейке Хеле-Шоу:

$$\mathbf{u} = -\frac{\delta^2}{12\mu} \text{grad } p$$

Модель Хеле-Шоу аналогична модели Дарси течения вязкой несжимаемой жидкости в изотропной пористой среде. Роль проницаемости  $k$  играет величина  $\delta^2/12$ . Трение о пластины ячейки моделирует воздействие пористого скелета.

В данной работе мы будем исследовать течения в радиальной ячейке Хеле-Шоу (рис.10). Радиальная геометрия вытеснения представляет больший интерес для приложений по сравнению с прямоугольной, так как отвечает, например, течению нефти в районе нагнетающей скважины.

## 2. Математическое описание течения в ячейке Хеле-Шоу. Введение поправочного коэффициента.

Система уравнений для описания течения в радиальной ячейке Хеле-Шоу представляет собой уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости (1) и уравнение баланса импульса (2) в форме закона Дарси (в полярной системе координат):

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{12\mu}{\delta^2} u, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} = -\frac{12\mu}{\delta^2} v, \quad (2)$$

Как показывают результаты экспериментов, аналитическое решение, полученное из математической модели, традиционно используемой для описания течений в ячейке Хеле-Шоу (основанной на аналоге закона Дарси), не соответствует экспериментальным данным. Предложено объяснение этого несоответствия. Уравнение баланса импульса классической модели (2) получено путем усреднения уравнений Навье-Стокса по зазору ячейки  $\delta$  для потока однофазной однородной жидкости. В действительности вязкая вытесняемая жидкость «прилипает» к пластинам ячейки, и, если мы рассмотрим поперечное сечение ячейки (рис. 11), мы можем наблюдать слоистое течение. В этом случае модель, основанная на усреднении в предположении однородности жидкости по поперечному сечению, оказывается неприменимой.

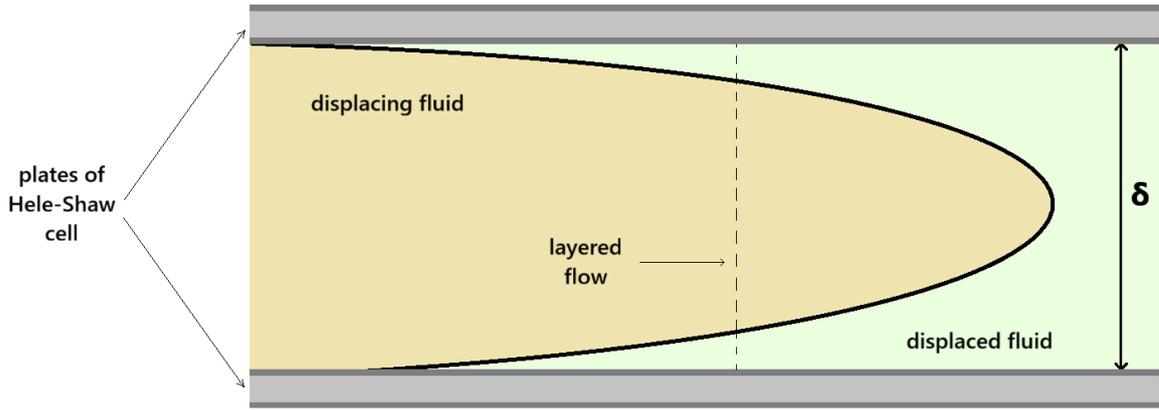


Рис. 11. Слоистое течение в поперечном сечении ячейки Хеле-Шоу.

Для решения этой задачи предлагается ввести поправочный коэффициент  $\alpha$  в уравнение баланса импульса (3).

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{12\alpha\mu}{\delta^2} u, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} = -\frac{12\alpha\mu}{\delta^2} v \quad (3)$$

В случае устойчивого вытеснения (например, при вытеснении воздуха глицерином) задача имеет аналитическое решение. введённым коэффициентом сопротивления.

$$\frac{dp_1}{dr} = -\frac{12\alpha_1\mu_1}{\delta^2} u_1, \quad \frac{dp_2}{dr} = -\frac{12\alpha_2\mu_2}{\delta^2} u_2$$

$$\frac{d}{dr}(ru_1) = 0, \quad \frac{d}{dr}(ru_2) = 0.$$

Начальные условия:

$$t = 0: \quad R = R_1$$

Граничные условия:

$$r = R_1: \quad p_1 = \Delta p = \rho g H$$

$$r = R_2: \quad p_2 = 0$$

$$r = R(t): \quad u_1 = u_2 = \frac{dR}{dt}, \quad p_1 - p_2 = \frac{\sigma}{R}$$

Решение уравнений баланса массы:

$$u_1 = u_2 = \frac{C_1(t)}{r} = \frac{C_2(t)}{r} = \frac{C(t)}{r}$$

Подставим решение в модифицированную модель Хеле-Шоу:

$$\begin{aligned}\frac{dp_1}{dr} &= -\frac{12\alpha_1\mu_1 C(t)}{\delta^2 r} \\ dp_1 &= -\frac{12\alpha_1\mu_1 C(t) dr}{\delta^2 r} \\ p_1 &= -\frac{12\alpha_1\mu_1 C(t)}{\delta^2} \ln r + A_1(t) \\ \frac{dp_2}{dr} &= -\frac{12\alpha_2\mu_2 C(t)}{\delta^2 r} \\ dp_2 &= -\frac{12\alpha_2\mu_2 C(t) dr}{\delta^2 r} \\ p_2 &= -\frac{12\alpha_2\mu_2 C(t)}{\delta^2} \ln r + A_2(t)\end{aligned}$$

Найдём разность неизвестных констант при подстановке граничных условий:

$$\begin{aligned}\Delta p(R) &= -\frac{12\alpha_1\mu_1 C(t)}{\delta^2} \ln R_1 + A_1(t), & A_1(t) &= \Delta p + \frac{12\alpha_1\mu_1 C(t)}{\delta^2} \ln R_1 \\ 0 &= -\frac{12\alpha_2\mu_2 C(t)}{\delta^2} \ln R_2 + A_2(t), & A_2(t) &= \frac{12\alpha_2\mu_2 C(t)}{\delta^2} \ln R_2\end{aligned}$$

$$A_1(t) - A_2(t) = \Delta p + \frac{12\alpha_1\mu_1 C(t)}{\delta^2} \ln R_1 - \frac{12\alpha_2\mu_2 C(t)}{\delta^2} \ln R_2$$

$$p_1 - p_2 = \frac{\sigma}{R}$$

$$-\frac{12\alpha_1\mu_1 C(t)}{\delta^2} \ln R + A_1(t) + \frac{12\alpha_2\mu_2 C(t)}{\delta^2} \ln R - A_2(t) = \frac{\sigma}{R}$$

$$\begin{aligned}-\frac{12\alpha_1\mu_1 C(t)}{\delta^2} \ln R + \frac{12\alpha_2\mu_2 C(t)}{\delta^2} \ln R + \Delta p + \frac{12\alpha_1\mu_1 C(t)}{\delta^2} \ln R_1 \\ - \frac{12\alpha_2\mu_2 C(t)}{\delta^2} \ln R_2 = \frac{\sigma}{R}\end{aligned}$$

$$C(t) \left( -\frac{12\alpha_1\mu_1}{\delta^2} \ln R + \frac{12\alpha_2\mu_2}{\delta^2} \ln R + \frac{12\alpha_1\mu_1}{\delta^2} \ln R_1 - \frac{12\alpha_2\mu_2}{\delta^2} \ln R_2 \right) = \frac{\sigma}{R} - \Delta p$$

$$C(t) \left( \frac{12\alpha_1\mu_1}{\delta^2} (-\ln R + \ln R_1) + \frac{12\alpha_2\mu_2}{\delta^2} (\ln R - \ln R_2) \right) = \frac{\sigma}{R} - \Delta p$$

$$C(t) \left( \frac{12\alpha_1\mu_1}{\delta^2} \ln \frac{R_1}{R} + \frac{12\alpha_2\mu_2}{\delta^2} \ln \frac{R}{R_2} \right) = \frac{\sigma - R\Delta p}{R}$$

$$C(t) \frac{12}{\delta^2} \left( \alpha_1\mu_1 \ln \frac{R_1}{R} + \alpha_2\mu_2 \ln \frac{R}{R_2} \right) = \frac{\sigma - R\Delta p}{R}$$

$$C(t) = \frac{\delta^2(\sigma - R\Delta p)}{12R \left( \alpha_1\mu_1 \ln \frac{R_1}{R} + \alpha_2\mu_2 \ln \frac{R}{R_2} \right)}$$

$$u_1 = u_2 = \frac{C(t)}{r} = \frac{dR}{dt}$$

$$\frac{\delta^2(\sigma - R\Delta p)}{12R \left( \alpha_1\mu_1 \ln \frac{R_1}{R} + \alpha_2\mu_2 \ln \frac{R}{R_2} \right)} \frac{1}{R} = \frac{dR}{dt}$$

$$dt = \frac{12R^2 \left( \alpha_1\mu_1 \ln \frac{R_1}{R} + \alpha_2\mu_2 \ln \frac{R}{R_2} \right)}{\delta^2(\sigma - R\Delta p)} dR$$

$$t = \int_{R_1}^R \frac{12R^2 \left( \alpha_1\mu_1 \ln \frac{R_1}{R} + \alpha_2\mu_2 \ln \frac{R}{R_2} \right)}{\delta^2(\sigma - \rho gHR)} dR$$

$$t = \int_{R_1}^R \frac{12R^2\alpha_1\mu_1 \ln \frac{R_1}{R} + 12R^2\alpha_2\mu_2 \ln \frac{R}{R_2}}{\delta^2\sigma - \delta^2\rho gHR} dR \quad (3^*)$$

Для упрощения примем  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ . Тогда получим:

$$t = \alpha \int_{R_1}^R \frac{12R^2\mu_1 \ln \frac{R_1}{R} + 12R^2\mu_2 \ln \frac{R}{R_2}}{\delta^2\sigma - \delta^2\rho gHR} dR$$

### 3. Линейный анализ для неустойчивого вытеснения вязкой жидкости из ячейки Хеле-Шоу (для случая слабо смешивающихся жидкостей)

Рассмотрим радиальное вытеснение слабо смешивающихся несжимаемых жидкостей. Пусть вязкая жидкость «2» заполняет кольцеобразную ячейку Хеле-Шоу с источником в центре (рис.12). Размеры ячейки: внутренний радиус (радиус источника) –  $R_1$ , внешний (радиус пластин) –  $R_2$ . Зазор между пластинами ячейки –  $\delta$ . В ячейку сквозь третье измерение (через вертикальную трубку) с постоянным объёмным расходом  $Q > 0$  подаётся менее вязкая жидкость «1».

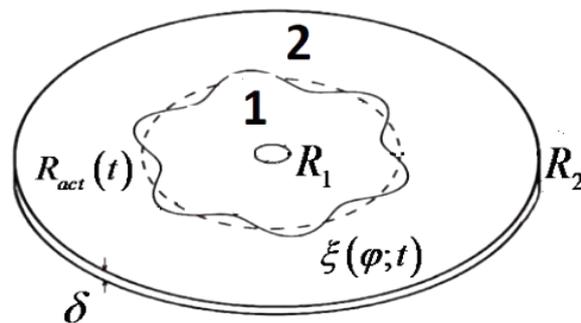


Рис.12. Радиальное вытеснение вязкой жидкости из ячейки Хеле-Шоу.

Для описания вытеснения воспользуемся уравнением неразрывности и модифицированной моделью Хеле-Шоу в полярных координатах  $(r, \varphi)$ , влияние силы тяжести не учитываем:

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} = 0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{12\alpha\mu}{\delta^2} u, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} = -\frac{12\alpha\mu}{\delta^2} v,$$

где  $u, v$  – осреднённые по зазору ячейки радиальная и азимутальная компоненты вектора скорости  $\mathbf{W}$ ,  $p$  – осреднённое давление.  $\alpha$  – безразмерный коэффициент корректировки (зависит от  $\delta$  и  $R_1$  – в идеале должна быть еще зависимость от вязкости жидкости, плотности и т.д.).

На границе раздела поставим условия равенств нормальных скоростей и полных нормальных напряжений:

$$r = \xi(\varphi; t):$$

$$(p_{1n})_n = (p_{2n})_n$$

$$W_{1n} = W_{2n} = \frac{d\xi}{dt}.$$

Введём безразмерные параметры. В качестве характерной длины выберем текущий невозмущённый радиус вытеснения  $R_{act}$ , то есть актуальный радиус вытеснения в некоторый момент времени –  $R_{act} = R(t_0)$ , в качестве характерной вязкости возьмём большую вязкость  $\mu_2$ , характерной скорости –  $U_0 = Q / (2\pi R_{act} \delta)$ :

$$u = U_0 \cdot \tilde{u}, \quad v = U_0 \cdot \tilde{v}, \quad p = \frac{12 \mu_2 U_0 R_{act}}{\delta^2} \cdot \tilde{p},$$

$$r = R_{act} \cdot \tilde{r}, \quad R_{act} = R_{act} \cdot \tilde{R}_{act}, \quad \xi = R_{act} \cdot \tilde{\xi}, \quad M = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \quad t = \frac{R_{act}}{U_0} \cdot \tilde{t}.$$

Критерием подобия, определяющим картину вытеснения, оказывается геометрический параметр:  $k^2 = \delta^2 / 6R_{act}^2$ .

Проведём анализ устойчивости текущего положения фронта вытеснения  $R_{act}$  к малым возмущениям. Значения внутреннего радиуса  $R_1$  и внешнего  $R_2$  для реальной ячейки конечны, но в теоретическом рассмотрении можно считать пластины бесконечными, а источник точечным: внешний радиус  $R_2 \rightarrow \infty$ , внутренний  $R_1 \rightarrow 0$ .

Для линейного анализа устойчивости все параметры представляются в виде суммы невозмущенного значения и малых отклонений от невозмущенного состояния.

В случае отсутствия начального возмущения, граница раздела жидкостей сохраняет устойчивую форму окружности всё время движения (то есть ищем невозмущенные значения), тогда исходные уравнения и граничные условия принимают следующий вид:

$$\frac{d}{dr}(ru_1^*) = 0, \quad \frac{d}{dr}(ru_2^*) = 0,$$

$$\frac{dp_1^*}{dr} = -\frac{12\alpha\mu_1}{\delta^2} u_1^*, \quad \frac{dp_2^*}{dr} = -\frac{12\alpha\mu_2}{\delta^2} u_2^*,$$

В невозмущенном случае граничные условия имеют вид:

$$r = R(t):$$

$$p_1^* - 2\mu_1 \frac{du_1^*}{dr} = p_2^* - 2\mu_2 \frac{du_2^*}{dr},$$

$$u_1^* = u_2^* = \frac{dR}{dt}.$$

В начальный момент времени:  $t = 0$ :  $R = 0$ .

Решение имеет вид:

$$\frac{dp_1^*}{dr} = -\frac{12\alpha\mu_1}{\delta^2} \frac{Q}{2\pi\delta} \frac{1}{r} = -\frac{12\alpha Q\mu_1}{2\pi\delta^3} \frac{1}{r}, \quad \frac{dp_2^*}{dr} = -\frac{12\alpha Q\mu_2}{2\pi\delta^3} \frac{1}{r},$$

$$u_1^* = u_2^* = \frac{Q}{2\pi\delta} \frac{1}{r}, \quad R = \sqrt{\frac{Qt}{\pi\delta}}.$$

Обезразмеренное невозмущенное решение:

$$\frac{d\tilde{p}_1^*}{d\tilde{r}} = -\frac{\alpha}{M} \frac{1}{\tilde{r}}, \quad \frac{d\tilde{p}_2^*}{d\tilde{r}} = -\frac{\alpha}{\tilde{r}}, \quad \tilde{u}_1^* = \tilde{u}_2^* = \frac{1}{\tilde{r}}.$$

Исходные уравнения для малых возмущений в безразмерной форме:

$$\frac{\partial \tilde{p}'_1}{\partial \tilde{r}} = -\frac{\alpha}{M} \tilde{u}'_1, \quad \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{p}'_1}{\partial \varphi} = -\frac{\alpha}{M} \tilde{v}'_1, \quad \frac{\partial \tilde{u}'_1}{\partial \tilde{r}} + \frac{\tilde{u}'_1}{\tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{v}'_1}{\partial \varphi} = 0,$$

$$\frac{\partial \tilde{p}'_2}{\partial \tilde{r}} = -\alpha \tilde{u}'_2, \quad \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{p}'_2}{\partial \varphi} = -\alpha \tilde{v}'_2, \quad \frac{\partial \tilde{u}'_2}{\partial \tilde{r}} + \frac{\tilde{u}'_2}{\tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{v}'_2}{\partial \varphi} = 0.$$

Линеаризация граничных условий. Разложим компоненты скорости и давления в ряд Тейлора около невозмущенных значений.

Граничное условие для скорости:

$$u'_1|_{r=R(t)} + \left. \frac{du_1^*}{dr} \right|_{r=R(t)} \cdot \xi' = u'_2|_{r=R(t)} + \left. \frac{du_2^*}{dr} \right|_{r=R(t)} \cdot \xi' = \frac{\partial \xi'}{\partial t}$$

Граничное условие для давления:

$$p'_1|_{r=R(t)} - 2\mu_1 \left. \frac{\partial u'_1}{\partial r} \right|_{r=R(t)} + \left( \left. \frac{dp_1^*}{dr} \right|_{r=R(t)} - 2\mu_1 \left. \frac{d^2 u_1^*}{dr^2} \right|_{r=R(t)} \right) \cdot \xi' =$$

$$= p'_2|_{r=R(t)} - 2\mu_2 \left. \frac{\partial u'_2}{\partial r} \right|_{r=R(t)} + \left( \left. \frac{dp_2^*}{dr} \right|_{r=R(t)} - 2\mu_2 \left. \frac{d^2 u_2^*}{dr^2} \right|_{r=R(t)} \right) \cdot \xi'$$

Обезразмеренные граничные условия:

$$\tilde{u}'_1 + \frac{d\tilde{u}_1^*}{d\tilde{r}} \cdot \tilde{\xi}' = \tilde{u}'_2 + \frac{d\tilde{u}_2^*}{d\tilde{r}} \cdot \tilde{\xi}' = \frac{\partial \tilde{\xi}'}{\partial \tilde{t}}$$

$$\tilde{p}'_1 - \frac{k^2}{M} \frac{\partial \tilde{u}'_1}{\partial \tilde{r}} + \left( \frac{d\tilde{p}_1^*}{d\tilde{r}} - \frac{k^2}{M} \frac{d^2 \tilde{u}_1^*}{d\tilde{r}^2} \right) \cdot \tilde{\xi}' = \tilde{p}'_2 - k^2 \frac{\partial \tilde{u}'_2}{\partial \tilde{r}} + \left( \frac{d\tilde{p}_2^*}{d\tilde{r}} - k^2 \frac{d^2 \tilde{u}_2^*}{d\tilde{r}^2} \right) \cdot \tilde{\xi}'$$

Исключаем скорости и приходим к уравнению Лапласа для давления:

$$\frac{\partial^2 \tilde{p}'_1}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{p}'_1}{\partial \tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{\partial^2 \tilde{p}'_1}{\partial \varphi^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{p}'_2}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{p}'_2}{\partial \tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{\partial^2 \tilde{p}'_2}{\partial \varphi^2} = 0$$

Решения уравнения Лапласа, удовлетворяющее условиям затухания:

$$\tilde{p}'_1 = Ar^n f(t) e^{in\varphi}, \quad \tilde{p}'_2 = Br^{-n} f(t) e^{in\varphi}$$

$A, B$  – неизвестные константы, подлежащие определению из условий на границе раздела жидкостей. Найдём условия на эти константы:

$$\frac{\partial \tilde{p}'_1}{\partial \tilde{r}} = Af(t) e^{in\varphi} nr^{n-1} = -\frac{\alpha}{M} \tilde{u}'_1 \rightarrow \tilde{u}'_1 = -\frac{M}{\alpha} Af(t) e^{in\varphi} nr^{n-1}$$

$$\frac{\partial \tilde{p}'_2}{\partial \tilde{r}} = Bf(t) e^{in\varphi} (-n)r^{-n-1} = -\alpha \tilde{u}'_2 \rightarrow \tilde{u}'_2 = \frac{B}{\alpha} f(t) e^{in\varphi} nr^{-n-1}$$

$$\tilde{u}_1^* = \tilde{u}_2^* = \frac{1}{\tilde{r}} \rightarrow \frac{d\tilde{u}_1^*}{d\tilde{r}} = \frac{d\tilde{u}_2^*}{d\tilde{r}} = -\frac{1}{\tilde{r}^2}$$

$r = 1$ :

$$\begin{aligned} \tilde{u}'_1 + \frac{d\tilde{u}_1^*}{d\tilde{r}} \cdot \tilde{\xi}' &= \tilde{u}'_2 + \frac{d\tilde{u}_2^*}{d\tilde{r}} \cdot \tilde{\xi}' \\ -\frac{M}{\alpha} Af(t) e^{in\varphi} n - \tilde{\xi}' &= \frac{B}{\alpha} f(t) e^{in\varphi} n - \tilde{\xi}' \\ -\frac{M}{\alpha} Af(t) e^{in\varphi} n &= \frac{B}{\alpha} f(t) e^{in\varphi} n \\ -MA &= B \\ MA + B &= 0 \end{aligned}$$

Любое возмущение границы раздела можно разложить в бесконечную сумму периодических волнообразных возмущений вида:

$$\tilde{\xi}'(\varphi; t) = Sf(t) e^{in\varphi},$$

где  $S$  – неизвестная константа,  $n$  – номер гармоники (волновое число), а  $f(t)$  представляет зависимость амплитуды возмущений от времени. Форма возмущённой поверхности  $\tilde{\xi}'$  ищется из второго граничного условия для нормальных составляющих скоростей:

$$\begin{aligned}
\tilde{u}'_1 + \frac{d\tilde{u}'_1}{d\tilde{r}} \cdot \tilde{\xi}' &= \frac{\partial \tilde{\xi}'}{\partial \tilde{t}} \\
-\frac{M}{\alpha} Af(t)e^{in\varphi} n - Sf(t)e^{in\varphi} &= Se^{in\varphi} \dot{f} \\
-\frac{M}{\alpha} Af(t)n &= S(\dot{f} + f(t)) \\
S &= \frac{-MAf(t)n}{\alpha(\dot{f} + f(t))} = \frac{-MAf(t)n}{\alpha f(t)\left(\frac{\dot{f}}{f(t)} + 1\right)} = \frac{-MA n}{\alpha\left(\frac{\dot{f}}{f(t)} + 1\right)} \\
\tilde{u}'_2 + \frac{d\tilde{u}'_2}{d\tilde{r}} \cdot \tilde{\xi}' &= \frac{\partial \tilde{\xi}'}{\partial \tilde{t}} \\
\frac{B}{\alpha} f(t)e^{in\varphi} n - Sf(t)e^{in\varphi} &= Se^{in\varphi} \dot{f} \\
\frac{B}{\alpha} f(t)n &= S(\dot{f} + f(t)) \\
S &= \frac{Bf(t)n}{\alpha(\dot{f} + f(t))} = \frac{Bf(t)n}{\alpha f(t)\left(\frac{\dot{f}}{f(t)} + 1\right)} = \frac{Bn}{\alpha\left(\frac{\dot{f}}{f(t)} + 1\right)} \tilde{\xi}' \\
&= \frac{-MA n}{\alpha\left(\frac{\dot{f}}{f(t)} + 1\right)} f(t)e^{in\varphi} = \frac{Bn}{\alpha\left(\frac{\dot{f}}{f(t)} + 1\right)} f(t)e^{in\varphi}
\end{aligned}$$

Найдём второе условие для определения констант А и В:

$$\begin{aligned}
\tilde{p}'_1 - \frac{k^2}{M} \frac{\partial \tilde{u}'_1}{\partial \tilde{r}} + \left( \frac{d\tilde{p}'_1}{d\tilde{r}} - \frac{k^2}{M} \frac{d^2 \tilde{u}'_1}{d\tilde{r}^2} \right) \cdot \tilde{\xi}' &= \tilde{p}'_2 - k^2 \frac{\partial \tilde{u}'_2}{\partial \tilde{r}} + \left( \frac{d\tilde{p}'_2}{d\tilde{r}} - k^2 \frac{d^2 \tilde{u}'_2}{d\tilde{r}^2} \right) \cdot \tilde{\xi}' \\
\tilde{p}'_1 &= Ar^n f(t)e^{in\varphi}, \quad \tilde{p}'_2 = Br^{-n} f(t)e^{in\varphi} \\
\frac{\partial \tilde{p}'_1}{\partial \tilde{r}} &= Af(t)e^{in\varphi} nr^{n-1} = -\frac{\alpha}{M} \tilde{u}'_1 \rightarrow \tilde{u}'_1 = -\frac{M}{\alpha} Af(t)e^{in\varphi} nr^{n-1} \\
\frac{\partial \tilde{p}'_2}{\partial \tilde{r}} &= Bf(t)e^{in\varphi} (-n)r^{-n-1} = -\alpha \tilde{u}'_2 \rightarrow \tilde{u}'_2 = \frac{B}{\alpha} f(t)e^{in\varphi} nr^{-n-1}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \tilde{u}'_1}{\partial \tilde{r}} = -\frac{M}{\alpha} Af(t)e^{in\varphi} n(n-1)r^{n-2}$$

$$\frac{\partial \tilde{u}'_2}{\partial \tilde{r}} = -\frac{B}{\alpha} f(t)e^{in\varphi} n(n+1)r^{-n-2}$$

$$\frac{d\tilde{p}_1^*}{d\tilde{r}} = -\frac{\alpha}{M} \frac{1}{\tilde{r}}, \quad \frac{d\tilde{p}_2^*}{d\tilde{r}} = -\frac{\alpha}{\tilde{r}}$$

$$\tilde{u}_1^* = \tilde{u}_2^* = \frac{1}{\tilde{r}} \rightarrow \frac{d^2 \tilde{u}_1^*}{d\tilde{r}^2} = \frac{d^2 \tilde{u}_2^*}{d\tilde{r}^2} = \frac{2}{\tilde{r}^3}$$

$r = 1$ :

$$\begin{aligned} Af(t)e^{in\varphi} - \frac{k^2}{M} \left( -\frac{M}{\alpha} Af(t)e^{in\varphi} n(n-1) \right) + \left( -\frac{\alpha}{M} - \frac{k^2}{M} \cdot 2 \right) \cdot \tilde{\xi}' &= \\ = Bf(t)e^{in\varphi} - k^2 \left( -\frac{B}{\alpha} f(t)e^{in\varphi} n(n+1) \right) + (-\alpha - k^2 \cdot 2) \cdot \tilde{\xi}' & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Af(t)e^{in\varphi} + \frac{k^2}{\alpha} Af(t)e^{in\varphi} n(n-1) - \left( \frac{\alpha + 2k^2}{M} \right) \cdot \frac{-MAn}{\alpha \left( \frac{\dot{f}}{f(t)} + 1 \right)} f(t)e^{in\varphi} &= \\ = Bf(t)e^{in\varphi} + \frac{k^2}{\alpha} Bf(t)e^{in\varphi} n(n+1) - (\alpha + 2k^2) & \\ \cdot \frac{Bn}{\alpha \left( \frac{\dot{f}}{f(t)} + 1 \right)} f(t)e^{in\varphi} & \end{aligned}$$

$$A + \frac{k^2}{\alpha} An(n-1) + \frac{An(\alpha + 2k^2)}{\alpha \left( \frac{\dot{f}}{f(t)} + 1 \right)} = B + \frac{k^2}{\alpha} Bn(n+1) - \frac{Bn(\alpha + 2k^2)}{\alpha \left( \frac{\dot{f}}{f(t)} + 1 \right)}$$

$$A \left( 1 + \frac{k^2}{\alpha} n(n-1) + \frac{n(\alpha + 2k^2)}{\alpha \left( \frac{\dot{f}}{f(t)} + 1 \right)} \right)$$

$$+ B \left( -1 - \frac{k^2}{\alpha} n(n+1) + \frac{n(\alpha + 2k^2)}{\alpha \left( \frac{\dot{f}}{f(t)} + 1 \right)} \right) = 0$$

В итоге мы получили для констант  $A$  и  $B$  линейную однородную систему уравнений, нетривиальное решение которой существует только при условии равенства нулю её определителя:

$$MA + B = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 + \frac{k^2}{\alpha}n(n-1) + \frac{n(\alpha + 2k^2)}{\alpha\left(\frac{\dot{f}}{f(t)} + 1\right)} \end{pmatrix} A + \begin{pmatrix} -1 - \frac{k^2}{\alpha}n(n+1) + \frac{n(\alpha + 2k^2)}{\alpha\left(\frac{\dot{f}}{f(t)} + 1\right)} \end{pmatrix} B = 0$$

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} M & 1 \\ 1 + \frac{k^2}{\alpha}n(n-1) + \frac{n(\alpha + 2k^2)}{\alpha\left(\frac{\dot{f}}{f(t)} + 1\right)} & -1 - \frac{k^2}{\alpha}n(n+1) + \frac{n(\alpha + 2k^2)}{\alpha\left(\frac{\dot{f}}{f(t)} + 1\right)} \end{vmatrix} \\ &= -M - \frac{Mk^2}{\alpha}n(n+1) + \frac{Mn(\alpha + 2k^2)}{\alpha\left(\frac{\dot{f}}{f(t)} + 1\right)} - 1 - \frac{k^2}{\alpha}n(n-1) \\ & \quad - \frac{n(\alpha + 2k^2)}{\alpha\left(\frac{\dot{f}}{f(t)} + 1\right)} = 0 \end{aligned}$$

$$\alpha\left(\frac{\dot{f}}{f(t)} + 1\right) = \frac{n(\alpha + 2k^2)}{\frac{(M+1)}{(M-1)} + \frac{k^2n^2(M+1)}{\alpha(M-1)} + \frac{k^2n}{\alpha}}$$

В качестве упрощения примем  $M \gg 1$ :

$$\alpha\left(\frac{\dot{f}}{f(t)} + 1\right) = \frac{n(\alpha + 2k^2)}{1 + \frac{k^2n^2}{\alpha} + \frac{k^2n}{\alpha}}$$

$$\frac{\dot{f}}{f(t)} + 1 = \frac{n(\alpha + 2k^2)}{\alpha + k^2n^2 + k^2n}$$

$$\frac{\dot{f}}{f(t)} = \frac{n\alpha + k^2n - \alpha - k^2n^2}{\alpha + k^2n^2 + k^2n}$$

Условие  $df/dt = 0$  позволяет определить критическое волновое число:

$$\frac{1}{f} \frac{df}{dt} = \frac{n\alpha + k^2n - \alpha - k^2n^2}{\alpha + k^2n^2 + k^2n} = 0$$

$$(n - 1)(\alpha - k^2n) = 0$$

$$n_1 = 1$$

$$n_2 = \frac{\alpha}{k^2}$$

Выяснить, устойчиво ли возмущение  $n_c = 1$  типа трансляции настоящая теория не позволяет.

Критическая длина волны возмущения имеет вид:

$$\lambda_c = \frac{2\pi R_{act}}{n_c} = \frac{L_{act}}{n_c}$$

Вытеснение считается устойчивым до тех пор, пока  $L_{act} < \lambda_c$ . Как только  $L_{act}$  превышает  $\lambda_c$ , начинается рост вязких пальцев. Таким образом, критерием устойчивости вытеснения оказывается:

$$\lambda_c n_c < \lambda_c$$

$$n_c < 1$$

$$\frac{\alpha}{k^2} < 1$$

$$k^2 > \alpha$$

$$\frac{\delta^2}{6R_{act}^2} > \alpha$$

$$\frac{6R_{act}^2}{\delta^2} < \frac{1}{\alpha}$$

$$R_{act}^2 < \frac{\delta^2}{6\alpha}$$

$$R_{act} < \frac{\delta}{\sqrt{6\alpha}}$$

Количество образующихся вязких пальцев можно оценить по номеру наиболее быстро растущей гармоники, который определяется из условия:

$$\frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{df}{dt} \right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial n} \left( f \left( \frac{n\alpha + k^2n - \alpha - k^2n^2}{\alpha + k^2n^2 + k^2n} \right) \right) = 0$$

$$(\alpha + 2k^2)(\alpha - k^2n^2) = 0$$

$$\alpha = k^2n^2$$

$$n^2 = \frac{\alpha}{k^2}$$

$$n = \frac{\sqrt{\alpha}}{k}$$

$$n = \frac{\sqrt{6\alpha}R_{act}}{\delta}$$

#### **4. Проведение эксперимента по двухфазному течению в ячейке Хеле-Шоу. Задание практикума**

Экспериментальная установка.

Ячейка представляет собой две стеклянные пластины шириной 1,5 см. Нижняя пластина прямоугольной формы с четырьмя креплениями с силиконовыми головками. Верхняя пластина квадратной формы 22 см на 22 см с отверстием в центре диаметром 1 см имеет две горизонтальные шкалы. Пластины находятся на поддоне. Зазор между пластинами регулируется с помощью металлических шайб разной ширины. В центральное отверстие вставляется кран с внутренним диаметром 6,5 мм. В верхнюю часть крана вставляется либо трубка, идущая ко дну пятилитровой канистры, расположенной на определенной высоте, чтобы уровень жидкости был равен определенной высоте от зазора ячейки, либо вертикальная прозрачная соломинка длиной 20-25 см (?).

Эксперимент проходит в два этапа: устойчивое вытеснение несмешивающихся жидкостей и неустойчивое вытеснение либо несмешивающихся, либо слабо смешивающихся жидкостей.

Устойчивое радиальное вытеснение.

Первый этап – устойчивое вытеснение. В качестве вытесняемой жидкости берется любая существенно более вязкая, чем воздух, жидкость, к качеству вытесняемой выступает воздух.

- 1) Выбирается регулируемый шайбочками зазор между пластинами ячейки Хеле-Шоу от 0,3 до 3 мм. Шайбочки устанавливаются между пластинами и зазор фиксируется с помощью креплений нижней пластины;
- 2) Устанавливается закрытый кран, в него для устанавливается трубка, ведущая к баку с вязкой жидкостью. До начала эксперимента нужно, чтобы в трубке помимо жидкости не было пузыря воздуха;
- 3) Для подсьемки эксперимента, если требуется, устанавливается штатив и свет;
- 4) Эксперимент снимается сверху, чтобы было видно распространение круга по шкале верхней пластины. Нужно, чтобы круг дотек до 6-7 см. Кран закрывается.

Промежуточный этап.

Из закрытого крана быстро вытаскивается трубка и с помощью щипцов закрепляется на баке. Верхнее отверстие прочищается с помощью салфеток.

Второй этап – неустойчивое вытеснение. В качестве вытесняемой жидкости берется вытесняющая жидкость первого этапа, в качестве вытесняющей – менее вязкая жидкость, чем первая.

- 1) На верхнюю часть крана надевается вертикальная прозрачная соломинка, в нее через воронку заливается подкрашенная менее вязкая жидкость;
- 2) Открывается кран. Съёмка ведется с двух сторон под краном, чтобы уловить появление и установить подсчет образующихся вязких пальцев.

Конец эксперимента. Для нового эксперимента требуется помыть и высушить ячейку.

Обработка эксперимента.

По видео 1 этапа эксперимента нужно найти время, за которое граница раздела двух жидкостей дотекает до 1 см, 2 см и т.д. Получившиеся точки нанести на график  $t$  (по оси абсцисс) от  $R$  (по оси ординат).

По видео 2 этапа считатется количество пальцев.

Задание практикума.

Получить зависимость коррекционного коэффициента от величины зазора.

Требуется проведение 3х двухэтапных экспериментов (3 устойчивых и 3 неустойчивых) с разной величиной зазоров. Для каждого эксперимента построить 2 графика. 1 график: теоретическая кривая с наложенными экспериментальными точками, 2 график: теоретическая кривая, экспериментальные точки и теоретическая кривая с коэффициентом коррекции. Прямая с коэффициентом коррекции получается домножением теоретической кривой на некоторый коэффициент. Для каждого из трех экспериментов получается свое значение коэффициента, которое нужно после аппроксимировать.

Отчет.

Отчет по задаче состоит из:

1. Титульного листа с названием практикума, списком студентов и местом для подписи принимающего;
2. Краткая теория, написанная от руки;

3. 6 графиков устойчивого вытеснения с явной записью коэффициента коррекции для каждого случая;
4. 1 график аппроксимированного коэффициента коррекции от  $\Delta/R$ ;
5. Для каждого из трех экспериментов установить установить теоретическое и экспериментальное количество пальцев.