

## Программа по специальному курсу.

### «Основы вариационного исчисления»

Лектор проф. Звягин А.В.

1. Функционал одной функции одной переменной с неподвижными границами. Определение вариации функций в заданном классе. Вариация функционала. Необходимое условие стационарности функционала. Экстремали функционала. Уравнение Эйлера. Основные случаи, приводящие к первым интегралам дифференциальных уравнений для экстремалей.
2. Функционал от нескольких функций одной переменной. Система дифференциальных уравнений Эйлера для экстремалей. Методы решения задач для функционалов, зависящих от производных более высокого порядка, чем первый.
3. Функционал от функций нескольких независимых переменных. Минимизация (максимизация) функционала от одной функции многих переменных. Уравнение Остроградского для экстремалей таких функционалов. Пример сведения решения уравнений в частных производных к задаче минимизации функционалов (Уравнение Лапласа, уравнение Пуассона, уравнения колебаний).
4. Функционал при наличии дополнительных связей. Виды дополнительных связей. Понятие голономных и неголономных связей для механических систем. Условный экстремум функционала. Пример использования для механических систем со связями. Уравнение Гамильтона.
5. Функционал для экстремалей, заданных параметрическим способом. Независимость решения от способа параметризации кривых. Класс изопериметрических задач. Задача определения замкнутой кривой заданной длины, ограничивающей максимальную площадь. Двойственность изопериметрических задач.
6. Функционал с подвижными границами. Необходимые условия экстремума. Условия трансверсальности. Случай движения границы по заданной кривой или поверхности. Примеры решения задач, приводящих к функционалам с подвижными границами.
7. Функционалы от функций, разрывных на кривых или поверхностях. Сведение задач данного класса к минимизации функционала с подвижными границами. Примеры задач. Задача распространения света в неоднородной среде с границами раздела. Условия преломления и отражения.
8. Достаточные условия существования экстремума функционала. Поле экстремалей. Уравнение Якоби. Условие Якоби. Условие Вейерштрасса.
9. Прямые методы приближенного определения экстремалей функционала. Метод Эйлера. Метод Рица. Метод Канторовича.
10. Вариационные методы в механике. Теория упругости. Примеры применения (балка, колебания мембраны, задача кручения). Аналитическая гидродинамика. Использование вариационных методов в задачах движения твёрдых тел в потоке несжимаемой жидкости.

#### Литература

1. Эльстгольц Л.Э Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: «Физ.мат.лит». 1969. - 424 с.

2. Бердичевский В.Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1983. - 448с.
3. Петров А.Г. Аналитическая гидродинамика. Учебное пособие: для вузов. – М.: ФИЗМАТЛИТ.2009. – 520 с.